

Modelos de Campos de Tensões para Betão Estrutural

Verificação da segurança de apoios de extremidade

Diogo Miguel Moura Simões Churro Ferreira

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em

Engenharia Civil

Orientadores:

Professor Doutor João Carlos de Oliveira Fernandes de Almeida

Professor Doutor Miguel Filipe Passos Sérgio Lourenço

Júri

Presidente: Professor Doutor Mário Manuel Paisana dos Santos Lopes

Orientador: Professor Doutor Miguel Filipe Passos Sérgio Lourenço

Vogal: Professor Doutor António José Da Silva Costa

Julho de 2022

Declaração

Declaro que o presente documento é um trabalho original da minha autoria e que cumpre todos os requisitos do Código de Conduta e Boas Práticas da Universidade de Lisboa.

Agradecimentos

Ao Professor João Almeida, orientador desta dissertação, pelo convite para o estudo deste tema, empenho, motivação e conhecimentos transmitidos.

Ao Professor Miguel Lourenço, orientador desta dissertação, pelo conhecimento transmitido, empenho, paciência, rigor, disponibilidade e motivação na realização deste trabalho.

À empresa LCW Consult, em especial ao departamento de estruturas, pela motivação transmitida.

Aos meus familiares, em particular aos meus pais e irmão.

Como este ponto representa o término de uma etapa, gostaria também de agradecer aos colegas e amigos que estiveram presentes durante o curso.

RESUMO

A verificação da segurança dos apoios de extremidade tem sido abordada com pouca clareza, particularmente aquando da existência de armaduras pré-esforçadas ancoradas na proximidade da região do apoio. O objetivo principal é determinar a força na armadura, na zona do apoio, de modo a dimensionar adequadamente a região do nó, nomeadamente, o comprimento de amarração necessário. Esse estudo é elaborado para situações onde não exista esforço axial e situações onde existam diversos níveis de esforço axial, assim como a presença de cabos de pré-esforço ancorados junto do apoio. Baseado numa expressão desenvolvida a partir de um modelo de campos de tensões decorrente dos trabalhos em curso para o futuro *fib Model Code 2020*, são elaboradas diversas análises fisicamente não lineares, realizadas por um programa de cálculo automático de regiões de betão estrutural que utiliza o método dos elementos finitos, EvalS. Por fim, conclui-se que os resultados numéricos obtidos são semelhantes aos estimados pelo modelo de campos de tensões, demonstrando tratar-se de uma condição mínima para garantir a segurança da zona do apoio, o que permite validar a expressão proposta para o futuro MC2020.

Palavras-chave: Verificação do nó. Apoios de extremidade. Modelo de campos de tensões. Análises elástico-plásticas de campos de tensões.

ABSTRACT

Considering that the bottom longitudinal force to anchor in the region of the support has always been treated with little clarity, particularly when there are prestressed cables anchored near of the support region. It is a matter of evaluating this force in order to verify the safety of end supports. To do this, it is necessary to study the behavior of situations where there is no axial force and situations where there are several levels of axial force at different height levels. Based on an expression developed from a stress field model resulting from the ongoing work for the future *fib Model Code 2020*, nonlinear physical analyses are performed by an automatic calculation program for structural concrete regions using the finite element method (EvalS). In view of this, it is verified that the obtained numerical results were similar to the estimated by the stress field approach, demonstrating that this is a minimum condition to ensure safety for the design of these regions.

Keywords: Elasto-plastic stress fields. End supports. Stress field models.

SIMBOLOGIA

Subscritos	Letras Romanas	Letras Gregas
0 - sem esforço axial	A - área	σ - tensão
a - região inferior do apoio	a, c, d - distância	α, θ - ângulos
b - aderência	E - módulo de elasticidade	ρ - rácio
c - betão, compressão	f - resistência do material	δ - deslocamento
d - dimensionamento	F - força aplicada	η - coeficiente
i, j - constante	h - altura	ε - extensão
k - característico	R - reação	Φ - diâmetro
R - resistente	s - espaçamento	
s - aço	k - coeficiente	
w - alma	l - comprimento	
y - cedência	M - momento fletor	
	N - força axial	
	T - força de tração	
	V - esforço transversal	

ÍNDICE

RESUMO.....	i
ABSTRACT	iii
SIMBOLOGIA	v
ÍNDICE DE FIGURAS	ix
ÍNDICE DE TABELAS	xiv
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Contextualização.....	1
1.2 Objetivos.....	2
1.3 Organização.....	3
2 MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES.....	4
2.1 Princípio de Saint-Venant	4
2.2 Teorema estático da teoria da plasticidade	6
2.3 Regiões de continuidade e regiões de descontinuidade	6
2.4 Modelos de escoras e tirantes.....	8
2.5 Introdução dos campos de tensão nos códigos	10
2.6 Verificação de segurança de nós CCT	10
2.7 Necessidade de avaliação de modelos	16
2.8 Trabalhos anteriores	16
2.9 Análise numérica não linear de elementos de betão armado	17
2.9.1 Modelação do material betão.....	17
2.9.2 Modelação do material aço	19
3 CASO DE ESTUDO	21
3.1 Modelo de escoras e tirantes	21
3.2 Apresentação do modelo.....	24
3.2.1 Geometria	25

3.2.2	Materiais utilizados	27
3.2.3	Pormenorização da viga	27
3.2.4	Cálculo de A_{bottle}	30
3.2.5	Cálculo do braço interno, z.....	32
3.3	Segurança da região do apoio sem esforço axial	34
3.4	Segurança da região do apoio com distribuição de esforço axial uniforme.....	40
3.5	Segurança da região do apoio com distribuição de esforço axial não uniforme	46
3.5.1	Força pontual aplicada aproximadamente a meia altura da viga	48
3.5.2	Força pontual aplicada aproximadamente a h	56
3.5.3	Força pontual aplicada aproximadamente a $y=0$	64
3.6	Sugestão de um novo limite para a contribuição de esforço axial não uniforme	72
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	78
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	80
	ANEXOS	1

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 - Tensões de uma peça genérica quando aplicada uma força de compressão concentrada em cada extremidade.....	5
Figura 2 - Deformações de uma peça genérica quando aplicada uma força de compressão concentrada em cada extremidade.....	5
Figura 3 – Zonas D (sombreadas) com distribuição não linear de tensões devido a descontinuidades estáticas e/ ou geométricas (Schlaich & Schäfer, 1991).....	7
Figura 4 - Tipos de escoras (Lourenço & Almeida, 2004).....	9
Figura 5 - Divisão de regiões B, Regiões D e tipos de escoras.	9
Figura 6 - Diferentes tipos de nós (Salah E., et al, 2016).	11
Figura 7 - Nó sujeito a compressão e a tração com armaduras numa direção (eurocódigo 2, parte 1-1).....	11
Figura 8 – Amarração de armaduras inferiores em apoios extremos: a) Apoio direto: viga apoiada numa parede ou pilar; b) Apoio indireto: viga com apoio noutra viga, (NP EN 1992-1-1).	12
Figura 9 - Tipos de amarração para além da amarração de prolongamento reto: a) Comprimento de amarração de referência, l_b, r_{qd} seja qual for a forma do traçado, medido ao longo do eixo; b) Comprimento de amarração equivalente para um cotovelo corrente; c) Comprimento de amarração equivalente para um gancho corrente; d) Comprimento de amarração equivalente para um laço corrente; e) Comprimento de amarração equivalente com um varão transversal soldado; (eurocódigo 2, parte 1-1).	13
Figura 10 - Modelação do betão: a) Deformações; b) Círculo de Mohr e deformações principais; c) Direções das deformações principais; d) Superfície de cedência adotada para o estado plano de tensão; e) Resposta tensão – deformação adotada; f) Direções principais assumidas para as tensões (Ruiz & Muttoni, 2007).	18
Figura 11 - Elemento CST (constant strain triangle): (a) campo de deslocamentos no elemento; (b) extensões do elemento; (c) campo de tensões assumido para o esforço principal na direção i ; (d) forças nodais; (e) ângulo β em cada nó j (Ruiz & Muttoni., 2007).	19
Figura 12 - Modelação do aço: a) Campo de deslocamentos no elemento tipo barra; b) Forças nodais no elemento tipo barra; c) Comportamento elasto – plástico do aço com endurecimento por deformação (Ruiz & Muttoni, 2007).	20
Figura 13 - Resposta força - extensão de elementos fissurados de betão armado e das armaduras (Murray, et al., 2018).....	20

Figura 14 - Campo de tensões e modelo de escoras e tirantes do apoio de extremidade, retirada dos trabalhos em curso para o desenvolvimento do futuro fib Model Code 2020.	21
Figura 15 - Campo de tensões e modelo de escoras e tirantes do apoio de extremidade com pré-esforço, retirada dos trabalhos em curso para o desenvolvimento do futuro fib Model Code 2020.	23
Figura 16 - Geometria base dos modelos a ser estudados.	25
Figura 17 - Modelo utilizado no programa EvalS.	25
Figura 18 - Discretização da malha de elementos CST na região do apoio.	26
Figura 19 - Ponto de aplicação da carga excêntrico em relação ao eixo do elemento, a (CEB-FIP, MC 90 ,1993).	30
Figura 20 - Ponto de aplicação da carga excêntrico em relação ao eixo do elemento, b (CEB-FIP, MC 90 ,1993).	31
Figura 21 - Forças na secção para o cálculo de z.	33
Figura 22 - Modelo de campos de tensões da zona do apoio (sem esforço axial).	34
Figura 23 - Pormenorização das armaduras e das forças, nos modelos que abordam o caso sem esforço axial.	35
Figura 24 - "Utilization ratio" dos elementos de aço, retirado do programa EvalS.	36
Figura 25 - "Utilization ratio" dos elementos de betão, retirado do programa EvalS.	37
Figura 26 - "stresses" dos elementos de betão, retirado do programa EvalS.	37
Figura 27 - Cargas últimas para várias áreas de armadura.	38
Figura 28 - Relação entre a força T_a instalada e a força T_a resistente, para várias áreas de armadura.	39
Figura 29 - Força instalada em áreas de armaduras distintas, sem esforço axial.	40
Figura 30 - Comparação entre o campo de compressões na região do apoio sem esforço axial e o campo de compressões na região do apoio com 2MPa de tensão média, à esquerda e à direita, respetivamente.	41
Figura 31 - Pormenorização das armaduras e das forças, nos modelos que abordam o caso de N uniforme.	41
Figura 32 - T_a/T_{a0} com distribuição uniforme de tensões.	42
Figura 33 - Fúltimo/ F_d para as diversas tensões médias com distribuição uniforme de tensões.	43
Figura 34 - a) Gráfico força-deformação, $\sigma_{\text{méd}}=0.55\text{MPa}$; b) "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{méd}}=0.55\text{MPa}$	44
Figura 35 - a) Gráfico força-deformação, $\sigma_{\text{méd}}=3.2\text{MPa}$; b) "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{méd}}=3.2\text{MPa}$	44
Figura 36 - T_a/T_{a0} para várias dispensas de armaduras.	45

Figura 37 - Região da variação de contribuição da força axial.....	46
Figura 38 - Valores das abcissas para cada ponto de aplicação da carga axial.	47
Figura 39 - Pormenorização da viga, $y=0.525h$, $ap/h>h/2$ do eixo do apoio.....	48
Figura 40 - Pormenorização da viga, $y=0.525h$, $ap/h<h/2$ do eixo do apoio.....	49
Figura 41 - Quantificação da força, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$	49
Figura 42 - Campo de tensões, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$, $ap/h=-1.2$	51
Figura 43 - Campo de tensões, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$, $ap/h=0.4$	51
Figura 44 - Campo de tensões, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$, $ap/h=1.9$	51
Figura 45 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$, $ap/h=-1.2$	52
Figura 46 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$, $ap/h=0.4$	52
Figura 47 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$, $ap/h=1.9$	52
Figura 48 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{média}}=0.5\text{MPa}$, $y=0.525h$	53
Figura 49 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{média}}=1.0\text{MPa}$, $y=0.525h$	53
Figura 50 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$	53
Figura 51 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{média}}=2.0\text{MPa}$, $y=0.525h$	53
Figura 52 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{média}}=2.5\text{MPa}$, $y=0.525h$	53
Figura 53 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{média}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.525h$	53
Figura 54 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=0.5\text{MPa}$, $y=0.525h$	55
Figura 55 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=1.0\text{MPa}$, $y=0.525h$	55
Figura 56 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$	55
Figura 57 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=2.0\text{MPa}$, $y=0.525h$	55
Figura 58 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=2.5\text{MPa}$, $y=0.525h$	55
Figura 59 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.525h$	55
Figura 60 - Pormenorização da viga, $y=0.825h$, $ap/h>h/2$ do eixo do apoio.....	57
Figura 61 - Pormenorização da viga, $y=0.825h$, $ap/h<h/2$ do eixo do apoio.....	57
Figura 62 - Quantificação da força, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$	58
Figura 63 - Campo de tensões, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $ap/h=-1.6$	59
Figura 64 - Campo de tensões, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $ap/h=0.4$	59
Figura 65 - Campo de tensões, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $ap/h=2.2$	60
Figura 66 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $ap/h=-1.6$	60
Figura 67 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $ap/h=0.4$	60
Figura 68 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $ap/h=2.2$	60
Figura 69 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{média}}=0.5\text{MPa}$, $y=0.825h$	61
Figura 70 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{média}}=1.0\text{MPa}$, $y=0.825h$	61
Figura 71 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$	61
Figura 72 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{média}}=2.0\text{MPa}$, $y=0.825h$	61

Figura 73 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=2.5\text{MPa}$, $y=0.825h$	61
Figura 74 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.825h$	61
Figura 75 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=0.5\text{MPa}$, $y=0.825h$	63
Figura 76 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.0\text{MPa}$, $y=0.825h$	63
Figura 77 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$	63
Figura 78 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=2.0\text{MPa}$, $y=0.825h$	63
Figura 79 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=2.5\text{MPa}$, $y=0.825h$	63
Figura 80 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.825h$	63
Figura 81 - Pormenoriza\u00e7\u00e3o da viga, $y=0.125h$, $ap/h > h/2$ do eixo do apoio.....	65
Figura 82 - Pormenoriza\u00e7\u00e3o da viga, $y=0.125h$, $ap/h < h/2$ do eixo do apoio.....	65
Figura 83 - Quantifica\u00e7\u00e3o da for\u00e7a, $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$	66
Figura 84 - Campo de tens\u00f5es, $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $ap/h=-1.6$	67
Figura 85 - Campo de tens\u00f5es, $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $ap/h=0.4$	67
Figura 86 - Campo de tens\u00f5es, $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $ap/h=1.0$	68
Figura 87 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $ap/h=-1.6$	68
Figura 88 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $ap/h=0.4$	68
Figura 89 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $ap/h=1.0$	68
Figura 90 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=0.5\text{MPa}$, $y=0.125h$	69
Figura 91 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.0\text{MPa}$, $y=0.125h$	69
Figura 92 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$	69
Figura 93 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=2.0\text{MPa}$, $y=0.125h$	69
Figura 94 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=2.5\text{MPa}$, $y=0.125h$	69
Figura 95 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.125h$	69
Figura 96 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=0.5\text{MPa}$, $y=0.125h$	71
Figura 97 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.0\text{MPa}$, $y=0.125h$	71
Figura 98 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$	71
Figura 99 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=2.0\text{MPa}$, $y=0.125h$	71
Figura 100 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=2.5\text{MPa}$, $y=0.125h$	71
Figura 101 - F\u00fal\u00timo/ F_d , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.125h$	71
Figura 102 - Campo de tens\u00f5es da viga, $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.525h$, $ap/h=0.4$	72
Figura 103 - Campo de tens\u00f5es da viga, $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.525h$, $ap/h=1.9$	72
Figura 104 - Sugesta\u00e3o de novos limites da contribui\u00e7\u00e3o do esfor\u00e7o axial.....	73
Figura 105 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=0.5\text{MPa}$, $y=0.525h$	74
Figura 106 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.0\text{MPa}$, $y=0.525h$	74
Figura 107 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$	74
Figura 108 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\text{m\u00e9dia}}=2.0\text{MPa}$, $y=0.525h$	74

Figura 109 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=2.5\text{MPa}$, $y=0.525h$	74
Figura 110 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=3.0\text{MPa}$, $y=0.525h$	74
Figura 111 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=0.5\text{MPa}$, $y=0.825h$	75
Figura 112 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=1.0\text{MPa}$, $y=0.825h$	75
Figura 113 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$	75
Figura 114 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=2.0\text{MPa}$, $y=0.825h$	75
Figura 115 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=2.5\text{MPa}$, $y=0.825h$	75
Figura 116 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=3.0\text{MPa}$, $y=0.825h$	75
Figura 117 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=0.5\text{MPa}$, $y=0.125h$	76
Figura 118 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=1.0\text{MPa}$, $y=0.125h$	76
Figura 119 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$	76
Figura 120 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=2.0\text{MPa}$, $y=0.125h$	76
Figura 121 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=2.5\text{MPa}$, $y=0.125h$	76
Figura 122 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{\acute{m}edia}=3.0\text{MPa}$, $y=0.125h$	76

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1 - Características dos elementos de betão no programa EvalS.	27
Tabela 2 - Características dos elementos de aço no programa EvalS.....	27
Tabela 3 - $A_{sbottle, y=0.525h}$	31
Tabela 4 - $A_{sbottle, y=0.825h}$	32
Tabela 5 - $A_{sbottle, y=0.125h}$	32

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contextualização

Nos finais do séc. XIX, o betão armado teve uma grande expansão de utilização. No entanto, sem muitos fundamentos teóricos, muitas das aplicações eram baseadas em fórmulas empíricas. François Hennebique (1842-1921) foi um dos que mais contribuiu para essa expansão e mais obras executou no final do séc. XIX – início do séc. XX. Em 1892 patenteou todo um sistema monolítico que introduzia o uso de estribos em vigas. O sistema Hennebique, revolucionário para a época, motivou críticas do professor W. Ritter (1899), que propõe a analogia de uma treliça plana fissurada para o cálculo dos estribos que Morsch (1908) posteriormente ensaiou e melhorou, dando origem à teoria clássica de verificação do esforço transversal. Desde então muitos foram os autores que desenvolveram esta analogia e tentaram transpor as ideias base para todo o tipo de elementos, não se restringindo apenas a vigas, com ênfase nos trabalhos de Kupfer (1964), Marti (1985), Leonhard (1986), Schlaich & Schäfer (1991), Vecchio, F. et al, (1994) e Muttoni, A. et al, (1997). Todo este estudo de campos de tensões deu origem ao atual método de escoras e tirantes. Os modelos de escoras e tirantes e modelos de campos de tensões são métodos reconhecidos atualmente, são modelos de equilíbrio que se baseiam no teorema estático da teoria da plasticidade.

As estruturas podem ser divididas em dois tipos de regiões consoante a sua linearidade de extensões, as zonas de continuidade e zonas de descontinuidade. As regiões denominadas “zonas de descontinuidade” são caracterizadas por descontinuidades geométricas e/ou estáticas, são por isso mais complexas, ou menos estudadas, e têm um comportamento mais imprevisível, no entanto, se estas regiões não forem devidamente analisadas podem comprometer todo o bom funcionamento da estrutura. Nestas regiões, os métodos convencionais de dimensionamento de secções, a partir de esforços obtidos pela análise global da estrutura, não são válidos, existindo a necessidade de adotar outros procedimentos de dimensionamento. Nestes casos, os modelos de campos de tensões são uma solução adequada para o estudo destas regiões particulares da estrutura.

Os apoios de extremidade constituem zonas de descontinuidade, pelo que é realizado geralmente o método das escoras e tirantes para a sua verificação da segurança. Existem três mecanismos de rotura por esforço transversal na região do apoio de extremidade: rotura pelo esgotamento da capacidade resistente da armadura transversal; rotura por esmagamento do betão devido às compressões; e rotura por insuficiência, ou deficiente amarração da armadura prolongada até ao apoio. Os dois primeiros mecanismos mencionados estão claramente referenciados na

documentação técnica e normativa, enquanto que o mecanismo que decorre da força longitudinal necessária no apoio é em geral apresentado com menos clareza e generalidade. Em particular relacionado com o ponto anterior, salienta-se o caso da existência de armaduras pré-esforçadas ancoradas na proximidade da região do apoio, cuja possível contribuição não é em geral explicitamente considerada, aspeto que será analisado na presente dissertação.

1.2 Objetivos

Neste trabalho, fundamentado num modelo de campos de tensões decorrente dos trabalhos em curso para o desenvolvimento do futuro *fib Model Code 2020*, propõe-se estudar o desempenho do modelo de escoras e tirantes que permite quantificar a força longitudinal inferior na região do apoio de uma viga genérica. A expressão tem em consideração a contribuição do esforço axial que pode ser proveniente, por exemplo, de uma placa de ancoragem de um cabo de pré-esforço.

O ponto de aplicação do esforço axial influencia a sua contribuição para a força longitudinal necessária na região do apoio. Quando o ponto de aplicação está suficientemente afastado do apoio pode ser considerado como resultante de uma distribuição linear de tensões na secção transversal, de acordo com o princípio de Saint-Venant, por outro lado, quando o ponto de aplicação está próximo ou até mesmo na zona do apoio, apenas uma porção da sua contribuição deve ser considerada.

Esta expressão, ao ser desenvolvida unicamente a partir de um modelo de equilíbrio, não tem em consideração condições de compatibilidade. Deste modo, para se ter em conta tanto o equilíbrio como a compatibilidade, serão realizadas análises fisicamente não lineares com recurso a um programa de cálculo automático, que utiliza o método dos elementos finitos, EvalS educational (Ferreira, et al, 2017).

A validação desta expressão pretende passar por quatro pontos principais:

- Estudar a influência da colocação de diferentes áreas de armaduras na força instalada;
- Estudar/verificar o comportamento da viga, armada segundo o modelo de equilíbrio proposto, quando:
 - não há esforço axial;
 - sujeita a vários níveis de esforço axial;
 - o ponto de aplicação da força axial em alçado toma diversas posições, nomeadamente em altura e na direção longitudinal da viga.

1.3 Organização

Esta dissertação está estruturada em quatro capítulos.

No primeiro capítulo consta uma breve introdução ao trabalho, dá a conhecer a zona de descontinuidade em estudo, refere sucintamente as limitações das indicações dos atuais documentos técnicos e normativos e salienta os principais objetivos desta dissertação, assim como a sua organização.

O segundo capítulo apresenta o estado da arte integrando o problema específico em estudo no tema geral dos modelos de dimensionamento para regiões de descontinuidade de betão estrutural. Neste capítulo referem-se os modelos de campos de tensões, a sua base teórica, define-se o tipo de regiões de uma estrutura, a verificação da segurança dos elementos do modelo, o tipo de análises que se irão realizar e os trabalhos precedentes.

No terceiro capítulo, em que se apresenta e desenvolve o caso de estudo, inclui uma explicação detalhada da região a analisar. Neste capítulo é apresentado o modelo de campos de tensões dos trabalhos em curso para o desenvolvimento do futuro *fib Model Code 2020*, acompanhado pela justificação do modelo analítico que serve de fundamento ao trabalho. Em seguida são analisados e discutidos os resultados do comportamento da viga, armada segundo o modelo de equilíbrio proposto, para diversas situações de tensão média e ponto de aplicação do esforço axial.

O quarto capítulo serve para concluir o trabalho e resultados obtidos. Discute-se a adequabilidade do modelo proposto e referem-se possíveis trabalhos futuros relacionados com o tema.

2 MODELOS DE CAMPOS DE TENSÕES

Desde os primórdios do betão armado que, de forma algo intuitiva e empírica, se usam as trajetórias de tensões para armar elementos de betão armado. O *sistema Hennebique*, patenteado em 1892, é um exemplo disso mesmo, os varões longitudinais inferiores a meio vão nas vigas, permitia resistir aos momentos positivos que, a cerca de 1/3 de vão, metade dobrava e seguia para a zona superior da viga de modo a ficarem à tração por cima dos apoios (Hellebois & Espion 2010).

As estruturas têm regiões mais complexas, ou menos estudadas, do que outras, por vezes essas regiões comprometem todo o funcionamento da estrutura e torna-se importante efetuar análises com um nível de detalhe adequado ao problema. A análise de elementos finitos em regime elástico linear permite tratar elementos não fendilhados com rigor, no entanto, quando começa a existir fendilhação há que encontrar uma solução apropriada.

Os modelos de escoras e tirantes são uma evolução natural. Através do método do caminho de carga tentam acompanhar o andamento das trajetórias de tensões dentro das regiões que se pretendem estudar. Schlaich et al. (1987) foi um dos que mais desenvolveu este método, demonstrando inúmeros exemplos de utilização e o seu potencial de aplicação (Lourenço & Almeida, 2004).

O desenvolvimento dos potenciais informáticos nos dias correntes, permite análises não lineares, como os modelos de campos de tensões contínuos, que permitem obter uma estimativa fiável do comportamento em serviço das estruturas. Com recurso a este tipo de análise, baseado no método de escoras e tirantes, é possível não só realizar uma análise feita por equilíbrio, como também é possível realizar análises que tenham em conta o equilíbrio mais a compatibilidade, dando um grande passo na proximidade com o comportamento real das estruturas.

Presentemente, modelos de campos de tensões são uma técnica consagrada e reconhecida, aceite pela comunidade da engenharia de estruturas e presente em vários códigos de dimensionamento de betão armado, no entanto, apesar de tudo, ainda é de relativa recente utilização generalizada.

2.1 Princípio de Saint-Venant

O *princípio de Saint-Venant* partiu de uma conjectura formulada por Adhémar Jean-Claude Barré, Conde de Saint-Venant, em *Mémoire sur la torsion des prismes* (1853), posteriormente Boussinesq (1885), através dos seus desenvolvimentos, promoveu a conjectura a “Princípio” (Silva, 2015).

O princípio afirma que as forças quando aplicadas na extremidade de um corpo prismático, o modo de aplicação e distribuição das mesmas não têm efeito no resto da peça em zonas suficientemente distantes, por essa razão, é possível substituir as forças aplicadas por outras, desde que sejam estaticamente equivalentes.

As figuras 1 e 2, ilustram o princípio de Saint-Venant para um elemento genérico com cargas concentradas aplicadas nas extremidades, apresentando o campo de tensões e as deformações, respetivamente.

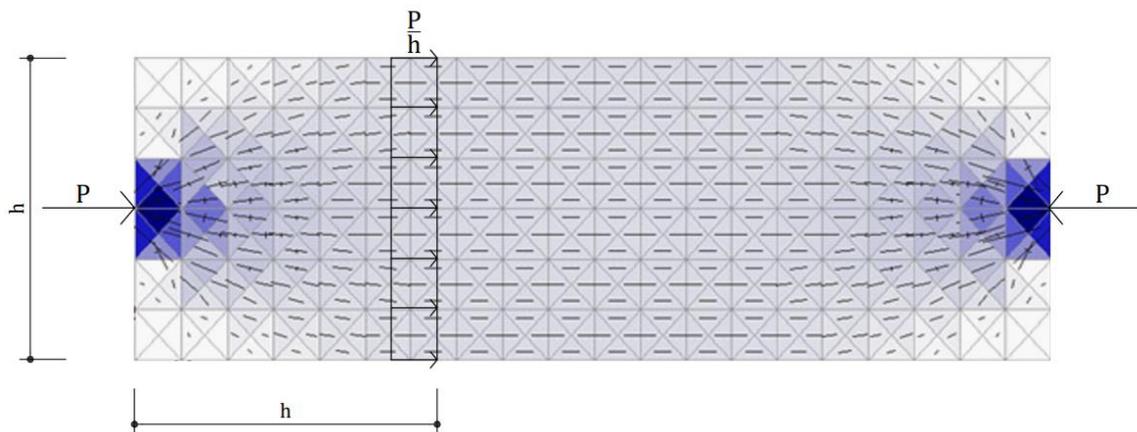


Figura 1 - Tensões de uma peça genérica quando aplicada uma força de compressão concentrada em cada extremidade.

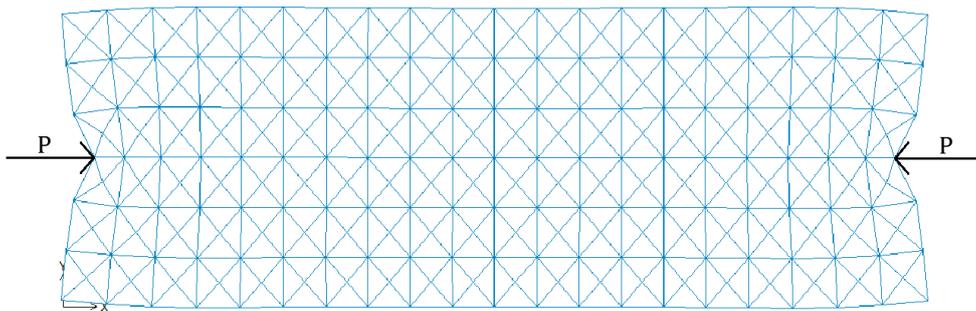


Figura 2 - Deformações de uma peça genérica quando aplicada uma força de compressão concentrada em cada extremidade.

Próximo ao ponto de aplicação da carga as tensões são elevadas, tornando-se à medida que se vai afastando inferiores e uniformes, com tendência a permanecer constantes, atingido o patamar onde as tensões ficam uniformes:

$$\sigma = E \times \varepsilon = \frac{P}{A} \quad (1.1)$$

As formulações apenas são consideradas para secção e propriedades mecânicas constantes, se existirem fissuras, negativos ou descontinuidades na peça poderá existir concentração de tensões junto às mesmas.

2.2 Teorema estático da teoria da plasticidade

O teorema estático dá um valor limite inferior da carga de colapso, também denominada carga limite. A carga obtida por este teorema é sempre inferior à carga de colapso, dando uma garantia de segurança.

O teorema refere que se for considerado um sistema em equilíbrio de forças exteriores com as forças internas, em que nenhum dos pontos a sua capacidade resistente seja ultrapassada, então a carga obtida é inferior à real carga de colapso.

Por se tratar de um teorema plástico, há que conseguir assegurar que exista ductilidade suficiente que permita uma redistribuição de esforços no interior do elemento.

A análise limite permite obter uma solução plástica, chegando ao colapso plástico, sem ser necessário saber a história de carregamento, i.e., recorrer a uma análise incremental. Por outro lado, este teorema não tem em conta as condições de compatibilidade da estrutura.

Este teorema é de bastante utilidade ao engenheiro projetista e atualmente a regulamentação de estruturas de betão permite a adoção deste método.

2.3 Regiões de continuidade e regiões de descontinuidade

Uma estrutura pode ser dividida em 2 tipos quanto à distribuição de tensões, as zonas B e as zonas D.

As zonas B, zonas de Bernoulli ou também denominadas de zonas de continuidade, definem-se por regiões onde as deformações são lineares e onde a hipótese das secções planas permanecem planas após deformação é válida. As zonas B podem ser avaliadas com os métodos convencionais de dimensionamento das secções, através do esforço normal, transversal e momento fletor, que na realidade são resultantes de tensões na secção.

As zonas D, também denominadas de zonas de descontinuidade, são regiões onde a hipótese de Bernoulli não é válida. Estas zonas são caracterizadas por descontinuidades geométricas e/ou estáticas não sendo possível o seu dimensionamento recorrendo a análises convencionais de secções.

Baseado no *princípio de Saint-Venant*, Schlaich & Schäfer (1991) sugere delimitar estas zonas de forma simplificada com o critério de o comprimento da zona D ser o comprimento transversal do elemento, figura 3.

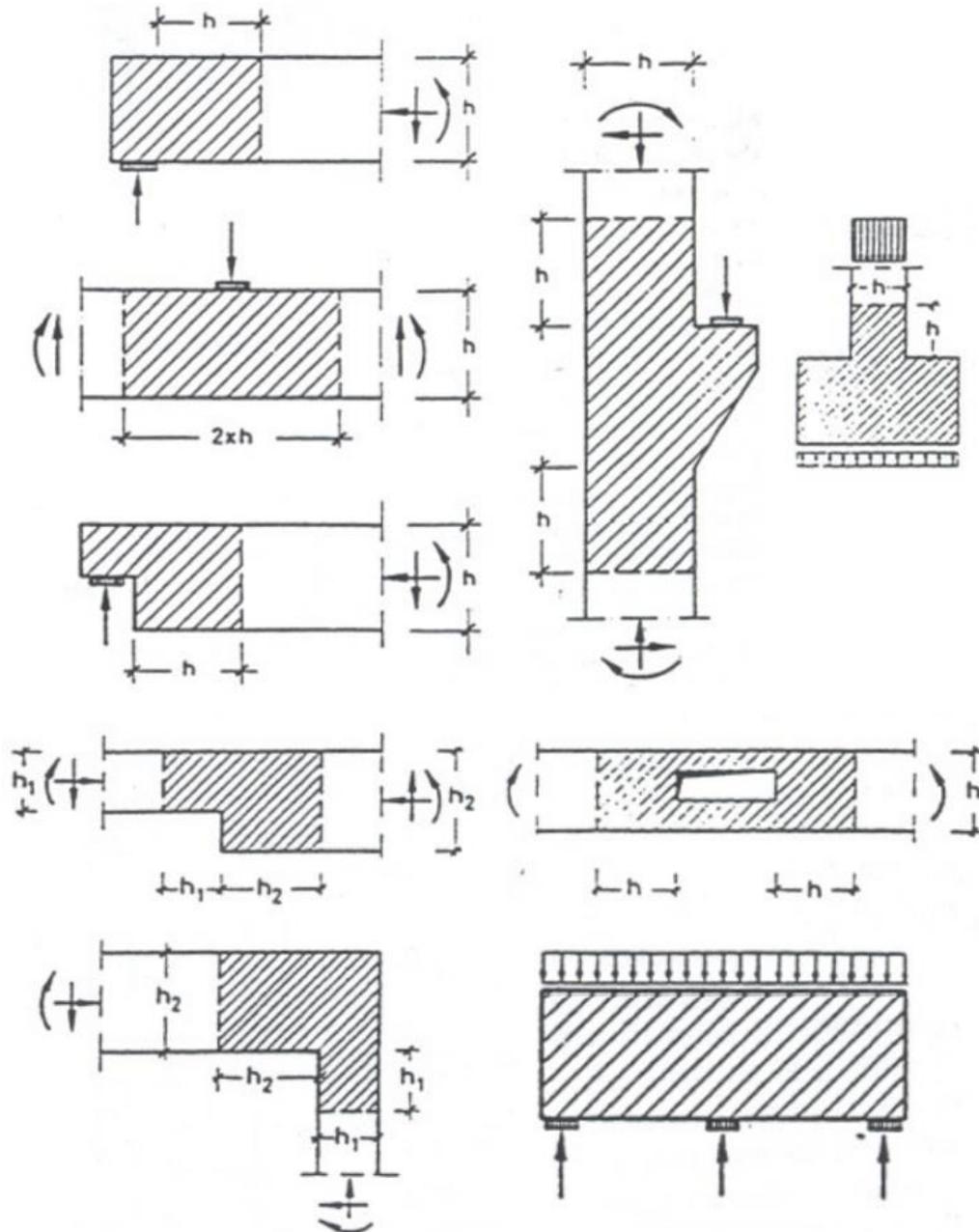


Figura 3 – Zonas D (sombreadas) com distribuição não linear de tensões devido a descontinuidades estáticas e/ou geométricas (Schlaich & Schäfer, 1991).

2.4 Modelos de escoras e tirantes

Em contraponto ao sistema Hennebique, Ritter (1899) propôs para o cálculo da armadura transversal, a analogia da treliça plana numa viga genérica fissurada, simplesmente apoiada, posteriormente aperfeiçoada e ensaiada por Morsch (1908), dando origem à teoria clássica de verificação do esforço transversal. Durante o séc. XX vários foram os autores que estudaram e aperfeiçoaram o método, entre eles Kupfer (1964). Quando a teoria da plasticidade começou a ser aplicada a elementos de betão, a escola de Zurich, onde se destacam Marti (1985) e Mueller (1978), generalizaram alguns conceitos da teoria clássica, mais tarde, em Estugarda, Leonhardt (1986) fez uma aplicação mais ampla, no entanto, o método de escoras e tirantes foi fortemente divulgado por Schlaich e Schafer em 1996 (Tommasi et al, 2003).

Os modelos de escoras e tirantes são um método viável para dimensionar as regiões D, sustentado no teorema estático da teoria da plasticidade. Consiste em desenvolver modelos em equilíbrio no interior dos elementos estruturais a projetar. O método tem uma vasta aplicação na engenharia de estruturas, inclusive é possível estimar a resistência de estruturas existentes, no entanto, o comportamento em serviço da estrutura é negligenciado. A grande dificuldade deste método prende-se em projetar um modelo aproximado à realidade, o que nem sempre é intuitivo, nem mesmo para um engenheiro com experiência.

O método do caminho de carga é o método mais conhecido para a criação de modelos de escoras e tirantes, procura encaminhar as forças externas para os apoios pelas trajetórias de carga para que não se afastem muito da realidade. Ao avaliarem-se os diagramas de tensões na fronteira dos modelos é possível subdividi-los pelos seus centros de gravidade, fazer o equilíbrio exterior do elemento em análise e criar caminhos de carga que levem essas tensões para os apoios, de preferência utilizando os caminhos mais curtos possíveis.

Estes modelos são constituídos por escoras, tirantes e pelos pontos que os unem, nós. Os nós devem estar em equilíbrio, sendo este equilíbrio conseguido à custa de forças de compressão e de tração. As compressões são representadas por escoras que são resistidas pelo próprio betão, as trações são representadas por tirantes que são resistidas por varões de armaduras.

Embora as escoras sejam do ponto de vista prático consideradas prismáticas, isso só acontece maioritariamente nas zonas B. Existem 3 tipos de escoras, definidas conforme a forma da sua distribuição de tensões, prismáticas, em leque e em garrafa, figura 4.

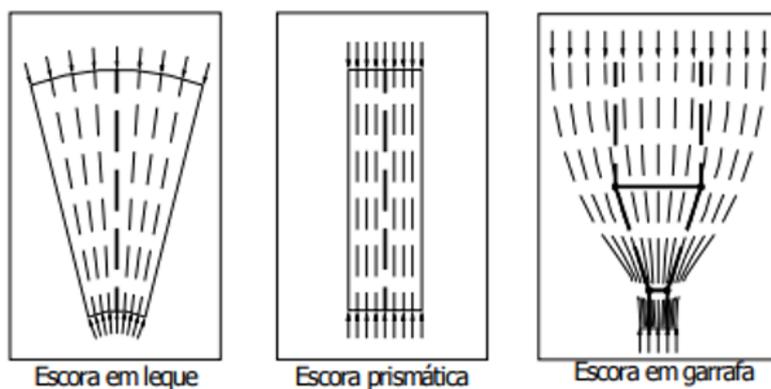


Figura 4 - Tipos de escoras (Lourenço & Almeida, 2004).

A figura 5 ilustra as tensões internas de uma viga e de um elemento pré-esforçado, as divisões em regiões B e D e o tipo de escoras existentes.

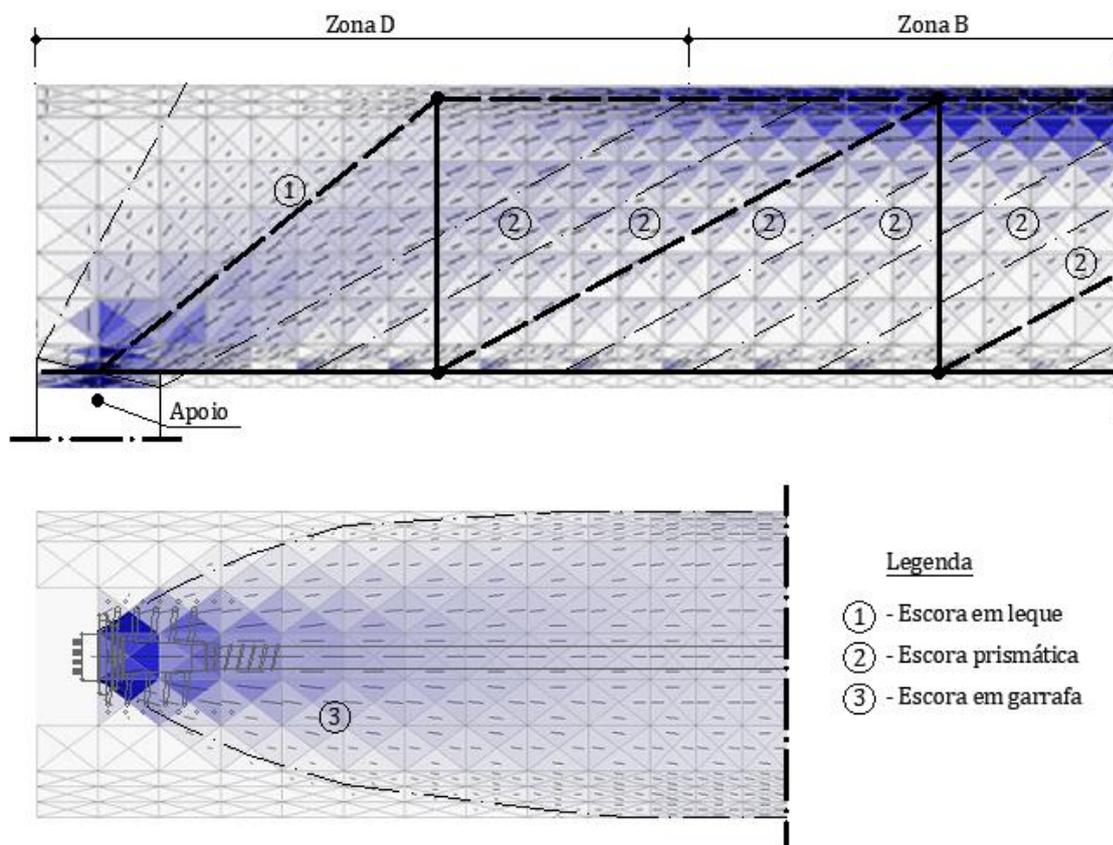


Figura 5 - Divisão de regiões B, Regiões D e tipos de escoras.

A resistência das escoras depende do estado de tensão a que estão sujeitas, do seu grau de confinamento e do seu grau de fissuração.

Se estiverem sujeitas a um estado multiaxial de compressão e a um bom confinamento, esta resistência é superior à resistência característica do betão, se por outro lado tiver trações na direção transversal o valor de resistência deve ser minorado.

A força a que os tirantes estão sujeitos no modelo é a força para a qual a armadura deve ser dimensionada, disposta em toda a extensão do tirante do modelo, por forma a que o centro de gravidade coincida com o tirante do modelo e devem ser devidamente amarradas nas zonas dos nós. É necessário ter em atenção que a disposição das armaduras tem uma elevada influência na resistência aquando da presença de forças elevadas. Deve-se manter espaçamentos adequados entre varões, para uma execução de qualidade em obra que permita uma betonagem e compactação adequada e que conceda condições de boa aderência.

2.5 Introdução dos campos de tensão nos códigos

Como referido anteriormente, o estudo dos campos de tensões intensificou-se desde o início do sex. XX, no entanto, a introdução dos campos de tensão na regulamentação nacional e internacional seguiu uma ascensão contida, mas gradual. A aplicação de campos de tensões nos códigos iniciou-se com o código modelo CEB-FIP 1990 (1993), desde então é possível realizar a segurança de elementos de betão armado com diferentes códigos, entre eles a norma ACI (2002) e o eurocódigo 2 (2010), sendo que hoje em dia o uso de campos de tensões nos códigos é generalizado.

2.6 Verificação de segurança de nós CCT

Os nós são pontos especiais dos modelos de escoras e tirantes, onde se cruzam trações e compressões ou onde há variação das direções das trajetórias das cargas, e têm obrigatoriamente de estar em equilíbrio. Quando os nós estão inseridos no interior geométrico de regiões, têm uma margem considerável de dissipação de tensões, não havendo necessidade de haver um cuidado especial com o comprimento de amarração das armaduras ou com o esmagamento das escoras, estes nós são chamados de nós distribuídos. A necessidade de estudo dos nós surge com cargas concentradas que originem tensões elevadas, como o caso de apoios ou cargas pontuais aplicadas, mas também em zonas com amarração de armaduras, estes nós são chamados de nós “concentrados”.

Podem-se dividir os principais tipos de nós concentrados em 4 categorias, onde C e T tomam o significado de compressão e tração, respetivamente:

- CCC
- CCT
- CTT
- TTT

As categorias de nós concentrados apresentam-se na figura 6.

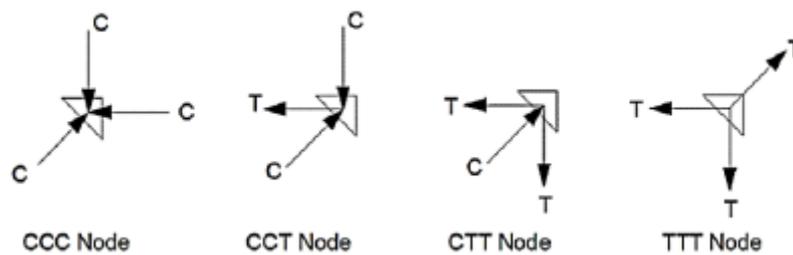


Figura 6 - Diferentes tipos de nós (Salah E., et al, 2016).

Em seguida pretende-se dar ênfase especial ao nó CCT, apresentado na figura 7.

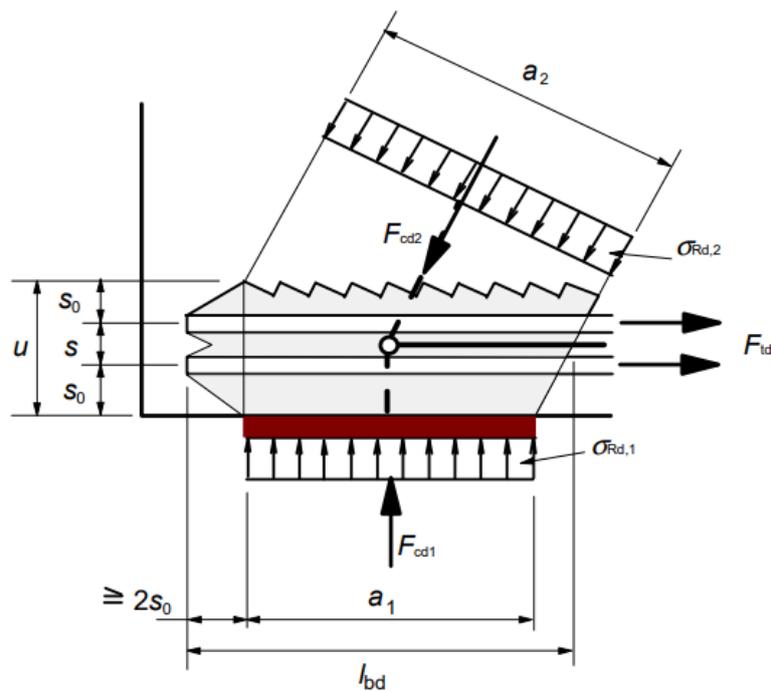


Figura 7 - Nó sujeito a compressão e a tração com armaduras numa direção (eurocódigo 2, parte 1-1).

O *eurocódigo 2 parte 1-1* refere que os valores de cálculo das tensões de compressão no interior de um nó CCT devem ter em conta as zonas fissuradas, permitindo de forma simplificada que se adote:

$$\sigma_{Rd,max} = k_2 v' f_{cd} \quad (1.2)$$

com,

$$v' = 1 - \frac{f_{ck}}{250} \quad (1.3)$$

em que,

k_2 toma o valor de 0.85;

$\sigma_{Rd,max}$ considera-se o maior dos valores de $\sigma_{Rd,1}$ e $\sigma_{Rd,2}$;

A amarração de nós CCT parte do início do nó, no caso de um apoio de extremidade de uma viga será a face interna do apoio que deverá ser prolongado a distância necessária, figura 8. Se a extensão do apoio não for suficiente para a amarração da armadura, esta poderá ser prolongada para além do apoio e devidamente dobrada. Existem variados tipos de amarração para além da amarração de prolongamento reto, apresentados na figura 9.

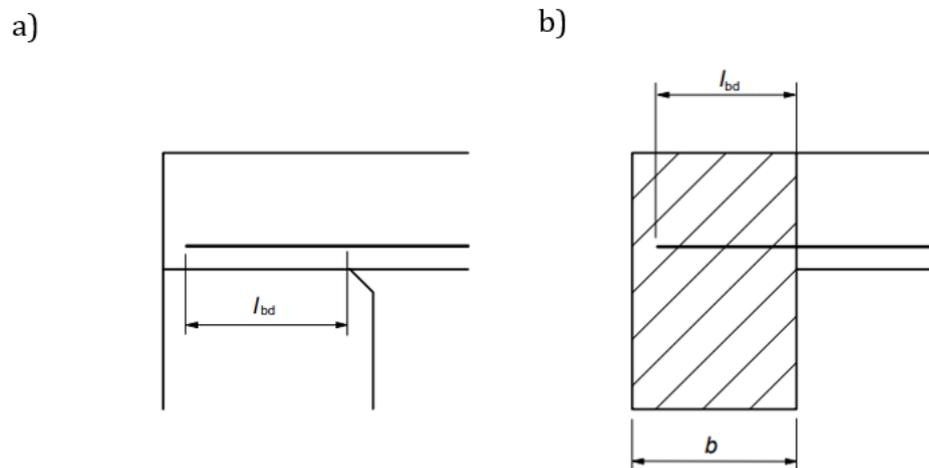


Figura 8 – Amarração de armaduras inferiores em apoios extremos: a) Apoio direto: viga apoiada numa parede ou pilar; b) Apoio indireto: viga com apoio noutra viga, (NP EN 1992-1-1).

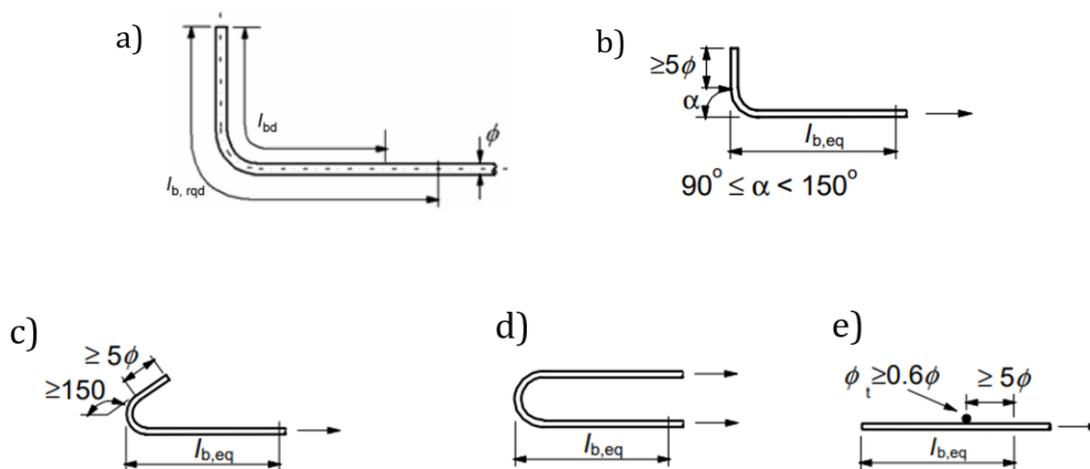


Figura 9 - Tipos de amarração para além da amarração de prolongamento reto: a) Comprimento de amarração de referência, $l_{b,rd}$ seja qual for a forma do traçado, medido ao longo do eixo; b) Comprimento de amarração equivalente para um cotovelo corrente; c) Comprimento de amarração equivalente para um gancho corrente; d) Comprimento de amarração equivalente para um laço corrente; e) Comprimento de amarração equivalente com um varão transversal soldado; (eurocódigo 2, parte 1-1).

Todas as etapas apresentadas em seguida nesta secção estão de acordo com o eurocódigo 2, parte 1-1.

Deve-se evitar que haja fendilhação longitudinal ou destacamento na amarração das forças de tração a que estão sujeitos os varões de aço, sendo realizada pelo cálculo da tensão de rotura da aderência.

O valor de cálculo da tensão de rotura da aderência pode ser calculado, através da seguinte expressão:

$$f_{bd} = 2.25 \eta_1 \eta_2 f_{cta} \quad (1.4)$$

em que,

f_{cta} é o valor de cálculo da resistência do betão à tração;

η_1 é o coeficiente relacionado com as condições de aderência e com a posição do varão durante a betonagem:

$\eta_1 = 1.0$ para condições de “boa” aderência;

$\eta_1 = 0.7$ para todos os outros casos;

η_2 está relacionado com o diâmetro do varão:

$\eta_2 = 1.0$ para $\phi \leq 32$ mm;

$\eta_2 = (132 - \phi)/100$ para $\phi > 32$ mm.

O comprimento de amarração de referência tem em consideração o tipo de aço utilizado e as propriedades de aderência dos varões, dado pela seguinte expressão:

$$l_{b,rqd} = \left(\frac{\phi}{4}\right) \left(\frac{\sigma_{sd}}{f_{bd}}\right) \quad (1.5)$$

onde,

σ_{sd} é o valor de cálculo da tensão na secção do varão a partir da qual é medido o comprimento de amarração.

O comprimento de amarração de cálculo pode ser calculado por:

$$l_{bd} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 l_{b,rqd} \geq l_{b,min} \quad (1.6)$$

onde,

- α_1 tem em conta o efeito da forma dos varões admitindo um recobrimento adequado;
- α_2 tem em conta o efeito do recobrimento mínimo de betão;
- α_3 tem em conta o efeito de cintagem das armaduras transversais;
- α_4 tem em conta a influência de um ou mais varões transversais soldados;
- α_5 tem em conta o efeito da pressão ortogonal ao plano de fendimento ao longo do comprimento de amarração de cálculo;
- $l_{b,rqd}$ obtido pela expressão (1.5);
- $l_{b,min}$ comprimento de amarração mínimo.

A força de tração a amarrar no apoio, segundo o EC2 em §9.2.1.4 (2), pode ser obtida através da seguinte fórmula:

$$F_{Ed} = \frac{|V_{Ed}| \cdot a_l}{z} + N_{Ed} \quad (1.7)$$

com,

$$a_t = \frac{z(\cot \theta - \cot \alpha)}{2} \quad (1.8)$$

onde,

N_{Ed} é o esforço normal, a adicionar ou a subtrair à força de tração;

θ é o ângulo formado pela escora comprimida de betão com o eixo da viga;

α é o ângulo formado pela armadura de esforço transversal com o eixo da viga;

z é a distância entre o eixo das tensões de tração e compressão no cálculo da flexão.

Ao considerar que a armadura transversal está posicionada verticalmente, como é usual, e substituindo a expressão (1.8) na expressão (1.7), vem que:

$$F_{Ed} = \frac{|V_{Ed}| \cdot \cot \theta}{2} + N_{Ed} \quad (1.9)$$

O *eurocódigo 2 parte 1-1* ressalva que a armadura inferior nos apoios extremos, com nulo ou fraco grau de encastramento, deve ter uma percentagem mínima de armadura de meio vão, dada na expressão (1.10).

$$A_{s,Ed} = \beta_2 A_{s,v\tilde{a}o} \quad (1.10)$$

onde,

β_2 é o valor da percentagem da armadura de meio vão, toma o valor de 0.25 para vigas;

$A_{s,v\tilde{a}o}$ é a área de armadura existente no vão.

2.7 Necessidade de avaliação de modelos

Existe uma vasta possibilidade de criação de modelos de escoras e tirantes, todas elas estão corretas desde que estejam em equilíbrio, no entanto, muitas delas à custa de graus de fissuração ou deformação plástica elevada, o que não é admissível em muitas situações em engenharia civil.

O controle da fissuração deve ser também tomado em atenção devido às fissuras serem um mecanismo de transmissão de compressões, quando a fissura tem uma dimensão reduzida, existe ao longo do seu comprimento atrito ao corte devido aos agregados que permite transmitir as tensões normais e tangenciais. No entanto, se as fissuras não forem controladas, este efeito pode ser muito reduzido.

Deste modo, torna-se importante a escolha de um modelo otimizado, que não se desvie excessivamente das tensões elásticas para não haver fissurações ou deformações elevadas em patamares de carga de serviço, para garantir um adequado estado limite de utilização.

Schlaich & Schäfer (1991), sugere uma otimização simplificada destes modelos baseado num critério energético, visto que a carga tende sempre a seguir o caminho que usa menor energia interna. As escoras ao serem muito menos deformáveis que os tirantes gastam menos energia, desta forma, pode-se escolher o modelo baseado na energia dos tirantes, em que $\sum F_i \times L_i$, força multiplicado pelo comprimento dos tirantes, seja o valor mais baixo de entre os modelos analisados.

2.8 Trabalhos anteriores

Este trabalho trata uma nova situação de dimensionamento e integra-se num conjunto de trabalhos antecedentes sobre modelos de campos de tensões, estudados com análises fisicamente não lineares:

- Caupers (2020), Seleção e avaliação de modelos de campos de tensões - modelos de vigas parede contínuas;
- Guimarães (2020), Seleção e avaliação de modelos de campos de tensões – modelos de cantos re-entrantes ou vigas com degraus;
- Sousa (2019), Seleção e avaliação de modelos de campos de tensões – Modelos típicos de vigas paredes submetidas a cargas concentradas indiretas;
- Gonçalves (2018), Aplicação de modelos não lineares ao estudo de regiões de descontinuidade de betão estrutural.

2.9 Análise numérica não linear de elementos de betão armado

Neste capítulo dá-se a conhecer, de forma introdutória, a abordagem proposta por Ruiz & Muttoni (2007), com a ajuda do método dos elementos finitos, para o desenvolvimento automático de campos de tensões com análises numéricas não lineares.

Este capítulo serve para, de forma indireta, introduzir o programa utilizado no presente trabalho, desenvolvido por Miguel Ferreira, EvalS (Ferreira, et al., 2017).

A abordagem sugerida permite ultrapassar as claras limitações de uma análise em regime elástico linear sem fissuração, referidas anteriormente, com a facilidade de apenas ser necessário um número limitado de parâmetros físicos.

Esta não é a única solução existente para as limitações referidas anteriormente, segundo Ruiz & Muttoni (2007), Muttoni et al. (1997) sugere um procedimento baseado na escolha do caminho das cargas e no controlo da abertura das fendas, todavia este método tem um problema inerente, requer um processo de iteração e exige um certo nível de experiência, o que o torna de difícil utilização de forma geral.

O método de resolução de equações não lineares que o programa EvalS utiliza é o método de convergência de Newton-Raphson modificado. Neste método a matriz de rigidez mantém-se constante ao longo das iterações, conduzindo a uma convergência com mais iterações, mas sem a complicação numérica de determinar a matriz de rigidez tangente em cada incremento de carga.

2.9.1 Modelação do material betão

O material betão é caracterizado por a sua resistência à tração ser desprezada e por as direções principais de tensão serem paralelas às direções principais de deformação, sendo os valores das tensões calculados a partir das deformações, (ver alínea (c) e (f) da figura 10). A resposta do betão é tratada considerando que funciona em regime elástico – perfeitamente plástico, como apresentado na figura 10e).

As tensões principais são calculadas da seguinte forma:

$$\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \quad (1.11)$$

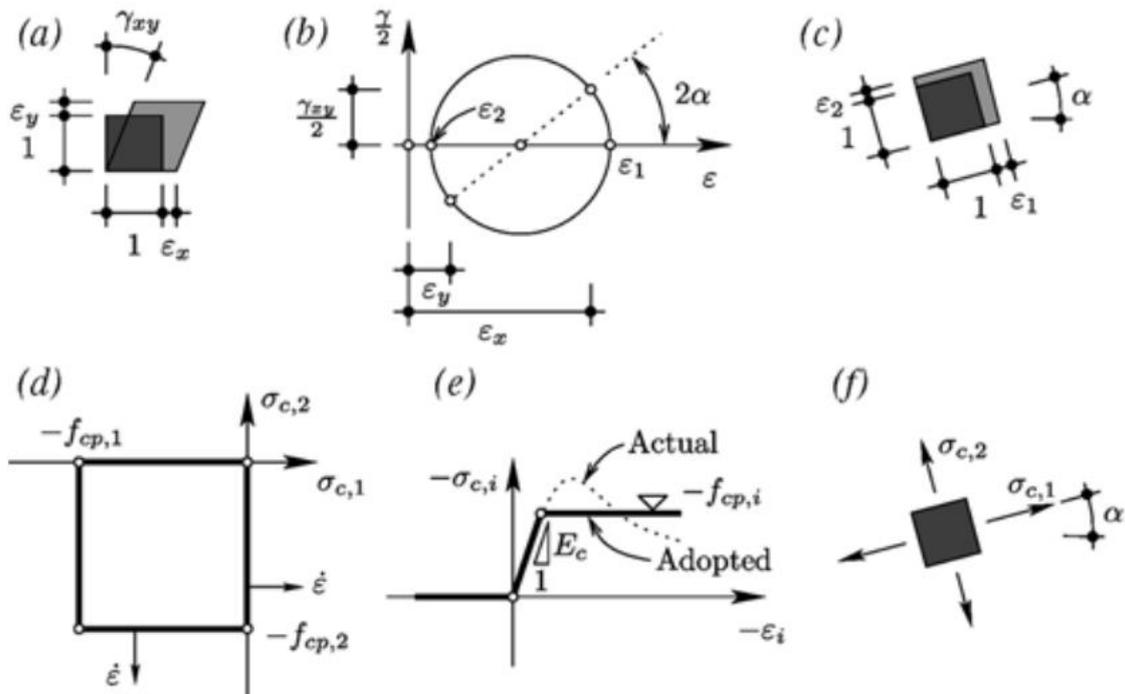


Figura 10 - Modelação do betão: a) Deformações; b) Círculo de Mohr e deformações principais; c) Direções das deformações principais; d) Superfície de cedência adotada para o estado plano de tensão; e) Resposta tensão – deformação adotada; f) Direções principais assumidas para as tensões (Ruiz & Muttoni, 2007).

O valor da resistência à compressão do betão é corrigido consoante as suas extensões transversais, no entanto o valor do módulo de elasticidade do betão permanece constante seja qual forem as extensões transversais. Foi considerado o modelo proposto por Vecchio et al. (1994), tal como referido em Ruiz e Muttoni (2007).

O valor da resistência do betão é obtido pela seguinte fórmula:

$$F_{cp} = \eta_{fc} \cdot \eta(\varepsilon_j) \cdot f_c \quad (1.12)$$

onde os valores η_{fc} . e $\eta(\varepsilon_j)$ representam o fator de rotura frágil e o coeficiente de redução de resistência devido à presença de extensões transversais de tração e são considerados no programa EvalS como sendo:

$$\eta_{fc} = 0.95$$

$$\eta(\varepsilon_j) = \frac{1}{0.8 + 170\varepsilon_j} \leq 1.0 \quad (1.13)$$

onde f é a resistência do betão à compressão e ε_j a extensão de tração transversal.

A modelação dos elementos de betão é realizada por elementos triangulares CST, *constant strain triangle*, figura 11, em que as forças nodais são obtidas pela seguinte expressão:

$$F_{i,j} = \sigma_i \frac{l_j}{2} \cos(\beta_j) - \frac{l_{j+1}}{2} \cos(\beta_{j+1}) \quad (1.14)$$

para $i \in (1, 2)$ e $j \in (1, 2, 3)$.

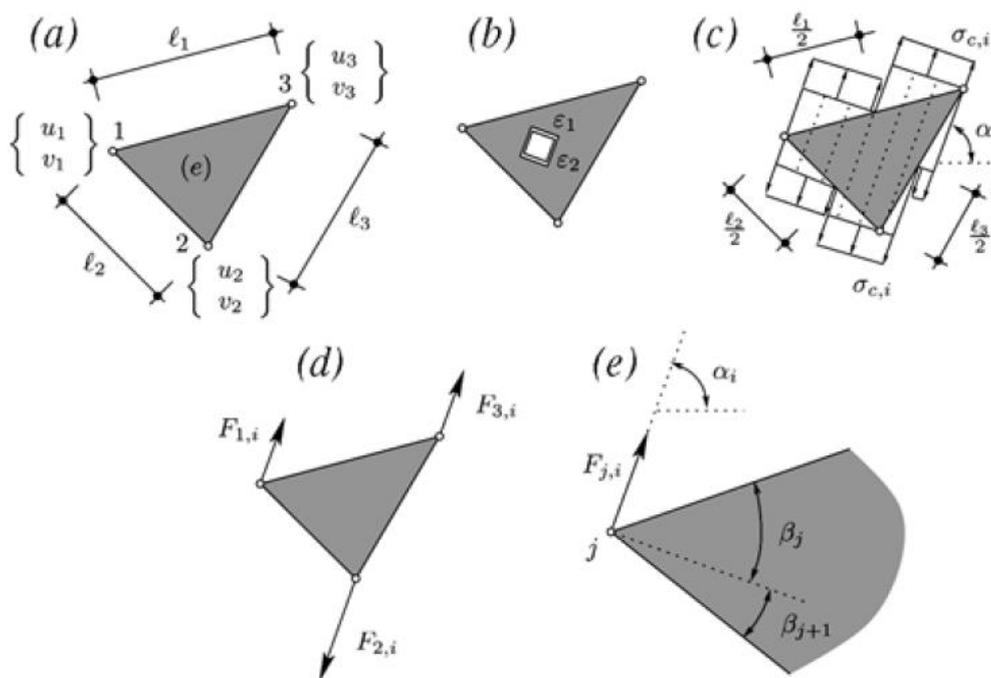


Figura 11 - Elemento CST (*constant strain triangle*): (a) campo de deslocamentos no elemento; (b) extensões do elemento; (c) campo de tensões assumido para o esforço principal na direção i ; (d) forças nodais; (e) ângulo β em cada nó j (Ruiz & Muttoni, 2007).

2.9.2 Modelação do material aço

O comportamento dos elementos de aço apenas depende do módulo de elasticidade, a tensão de cedência e o endurecimento em fase pós-cedência e é considerado que apenas tem esforço axial, como apresentado na figura 12.

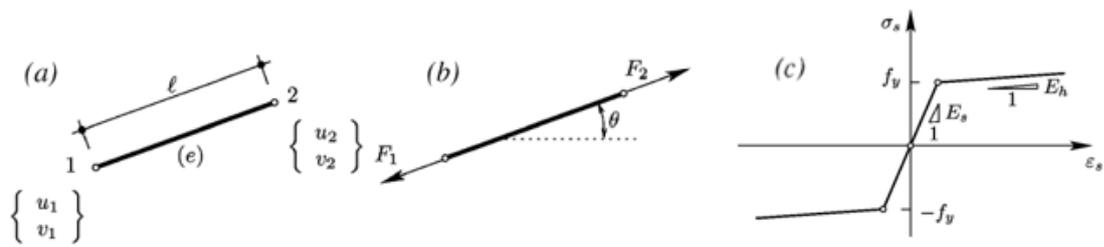


Figura 12 - Modelação do aço: a) Campo de deslocamentos no elemento tipo barra; b) Forças nodais no elemento tipo barra; c) Comportamento elasto - plástico do aço com endurecimento por deformação (Ruiz & Muttoni, 2007).

As forças nodais dos elementos de barra são obtidas pela seguinte expressão:

$$F_i = \sigma_s A_{s,i} \quad (1.15)$$

onde $A_{s,i}$ é a área da secção transversal da barra.

O programa EvalS permite também considerar o acréscimo de rigidez conferido pela envolvente do material betão ao redor do material aço, que se torna importante aquando do comportamento em serviço. Este efeito dá-se pelo nome de *Tension Stiffening* e apresenta-se na figura 13. Este efeito é importante para o estudo do comportamento em serviço de estruturas, não tendo sido utilizado neste trabalho pois as análises efetuadas pretendem apenas simular o comportamento para a carga de estado limite último.

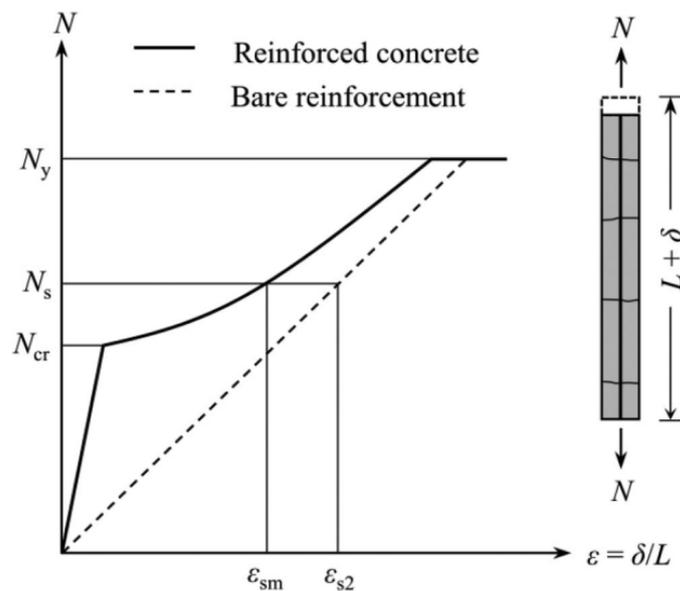


Figura 13 - Resposta força - extensão de elementos fissurados de betão armado e das armaduras (Murray, et al., 2018)

3 CASO DE ESTUDO

3.1 Modelo de escoras e tirantes

Para a avaliação da segurança na zona do apoio de extremidade de uma viga é necessário verificar o nó CCT, pelo que é importante conhecer a força de tração que ocorre no apoio para verificar adequadamente a amarração da armadura. No âmbito dos trabalhos em curso para o desenvolvimento do futuro **fib Model Code 2020** propõe-se o modelo de campos de tensões indicado na figura 14, para as várias ações indicadas na região do apoio, em que se assume que a força axial N se encontra distribuída por toda a seção. A partir do campo de tensões ilustrado é possível, através do equilíbrio estático, formular a equação que quantifica a força longitudinal inferior na região do apoio para uma viga genérica. Nesta fórmula a força medida está ao nível da camada das armaduras inferiores longitudinais a $c \times \cot\theta$ da face do apoio.

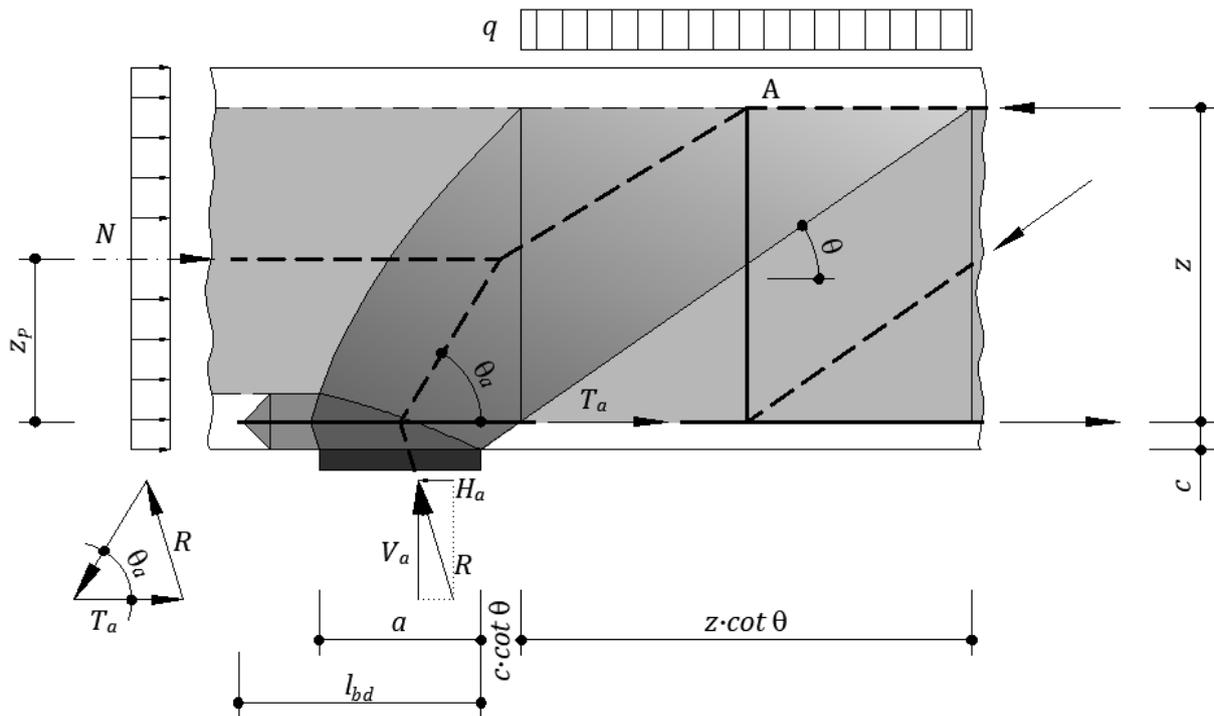


Figura 14 - Campo de tensões e modelo de escoras e tirantes do apoio de extremidade, retirada dos trabalhos em curso para o desenvolvimento do futuro fib Model Code 2020.

A força de tração, T_a , pode ser calculada através do modelo da figura 14 ao fazer o equilíbrio de momentos no ponto A:

$$\sum M_A = 0 \rightarrow V_{a,d} \left[\frac{a}{2} + \left(c + \frac{z}{2} \right) \cot(\theta) \right] = T_{a,d} z + N_d (z - z_p) - H_{a,d} z \quad (2.1)$$

$$T_{a,d} = \frac{V_{a,d} \left[\frac{a}{2} + \left(c + \frac{z}{2} \right) \cot(\theta) \right] - N_d (z - z_p) + H_{a,d} z}{z}$$

$$T_{a,d} = \frac{V_{a,d} [a + (2c + z) \cot(\theta)]}{2z} + N_d \left(1 - \frac{z_p}{z} \right) + H_{a,d} \quad (2.2)$$

onde,

- z_p é a distância vertical entre o ponto de aplicação da força e o nível da camada de armaduras longitudinais inferiores;
- θ é o ângulo de cálculo das escoras na zona corrente da viga;
- a é a largura do apoio;
- c é a distância da resultante das forças de tração à face inferior;
- z a distância entre o eixo das tensões de tração e compressão no cálculo da flexão;
- N_d é a resultante da força axial aplicada a uma distância suficiente para que se possa considerar uma distribuição linear de tensões na secção. N_d toma um valor positivo para tração e negativo para compressão.

Note-se que para o campo de tensões apresentado, o cálculo da força T_a é independente da posição da aplicação da força axial na direção longitudinal da viga. Esta situação verifica-se somente quando o ponto de aplicação da força está suficientemente afastado da face externa do apoio de modo a ser possível considerar uma distribuição uniforme.

Com base nesta questão, foi definido que para distâncias de aplicação da força superiores a $2z_p$, baseado no princípio de Saint-Venant, toda a contribuição da força para o cálculo de T_a deve ser considerada, e que opostamente não teria qualquer contribuição quando aplicada na posição longitudinal correspondente à face interna do apoio. Entre estas duas situações limite, propõe-se uma variação linear da contribuição da força axial para o cálculo da força T_a . A ilustração deste caso encontra-se representada na figura 15.

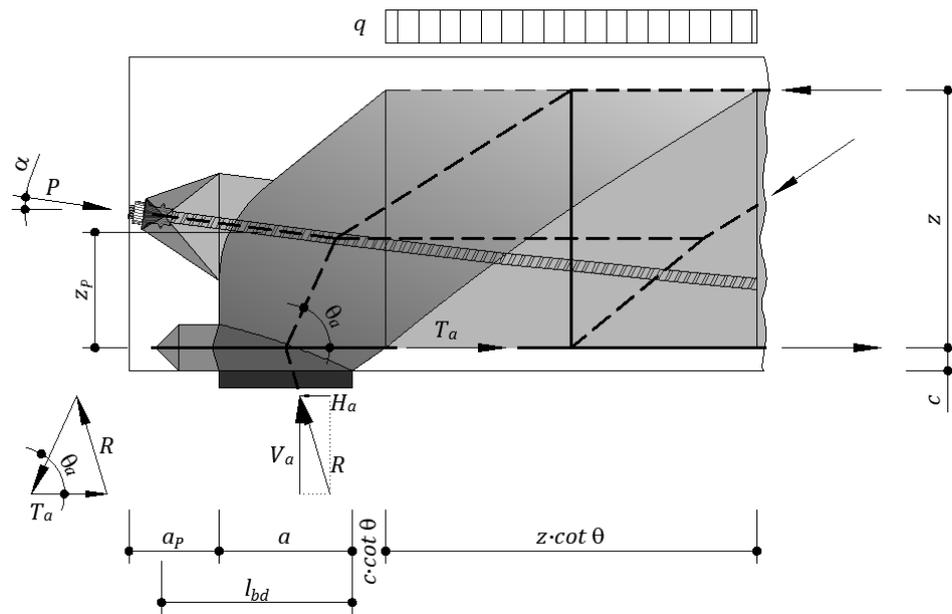


Figura 15 - Campo de tensões e modelo de escoras e tirantes do apoio de extremidade com pré-esforço, retirada dos trabalhos em curso para o desenvolvimento do futuro fib Model Code 2020.

Assim sendo, para o caso particular em que N_d esteja relacionado com a aplicação de pré-esforço na viga, na equação (2.2) pode considerar-se:

$$N_d = \frac{P_\infty \times \cos(\alpha) \times (a_p + a)}{(2z_p + a)} \quad (2.3)$$

quando,

$$-a \leq a_p \leq 2z_p$$

V_a deve ser também substituído por:

$$V_{a,d} \rightarrow V_{a,d} - P_\infty \text{sen} \alpha \quad (2.4)$$

onde,

P_∞ é a força de pré-esforço útil ou a tempo infinito;

α representa o ângulo entre a força e a horizontal;

a_p é a distância entre a face do apoio e o ponto de aplicação da força.

A eq. (2.2) é uma expressão que resulta diretamente do equilíbrio do modelo de campos de tensões e, portanto, não tem explicitamente em consideração a compatibilidade. T_a deve assim ser considerada como a força mínima para ser dimensionada a armadura a prolongar até ao apoio e servirá de base para dimensionar a sua amarração.

A proposta deste trabalho pretende-se com o estudo e validação da expressão apresentada (para o caso de $\alpha=0$), tendo sido efetuadas diversas análises não lineares, nomeadamente para as seguintes situações:

- consideração de vários níveis de esforço axial;
- alteração na posição de aplicação da força pontual em alçado, verticalmente e horizontalmente.

As análises foram efetuadas com recurso ao programa desenvolvido por Miguel Ferreira, EvalS, (Ferreira, et al, 2017). Tratando-se de um programa de análise não linear incremental, caso, para uma determinada pormenorização, não se atinja a carga última, conclui-se que a quantidade de armadura não é suficiente para garantir o equilíbrio da região. Refere-se que a força de tração disponível na zona do apoio de extremidade pode dever-se a dois fatores: a quantidade de armadura longitudinal é reduzida e atinge-se a tensão de cedência ou o comprimento de amarração limita a força de aderência máxima que poderá ocorrer à face do nó CCT. Dado que o programa EvalS educational não simula explicitamente a aderência, foi calibrada a área de armadura na face do nó para garantir que a força calculada pelo modelo de equilíbrio consista na cedência das armaduras na análise não linear.

3.2 Apresentação do modelo

O caso de estudo corresponde à situação particular de uma viga simplesmente apoiada com uma carga concentrada a meio vão. Neste capítulo, serão apresentados os materiais, a geometria do modelo, o esquema da discretização da malha de elementos finitos (CST – constant stress/strain triangles) na região do apoio, o cálculo das armaduras longitudinais, transversais e a sua disposição.

3.2.1 Geometria

A geometria base do caso particular que irá ser estudado, encontra-se representado na figura 16. Note-se que ao se tratar de uma situação académica não houve preocupação em realizar a pormenorização na zona de extremidade com a dobragem das armaduras principais.

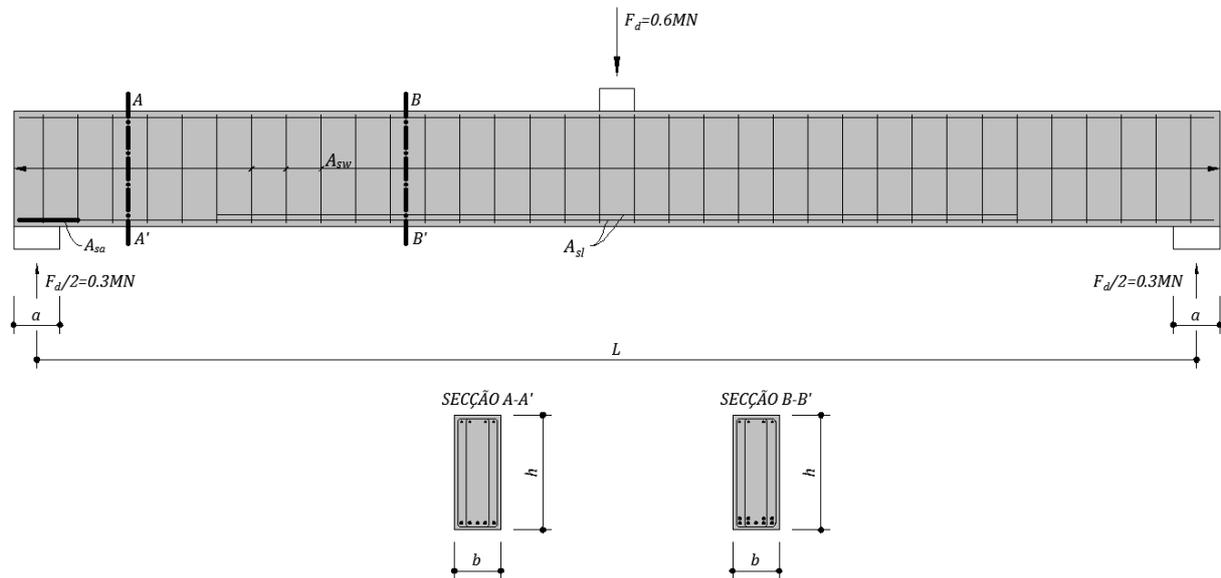


Figura 16 - Geometria base dos modelos a ser estudados.

As dimensões da viga utilizada para as análises foram:

- Distância entre o centro dos apoios, $L = 10.0 \text{ m}$
- Altura da viga, $h = 1.0 \text{ m}$
- Largura da viga, $b = 0.4 \text{ m}$
- Largura dos apoios, $a = 0.4 \text{ m}$

O modelo utilizado no programa EvalS apresenta-se em seguida na figura 17.

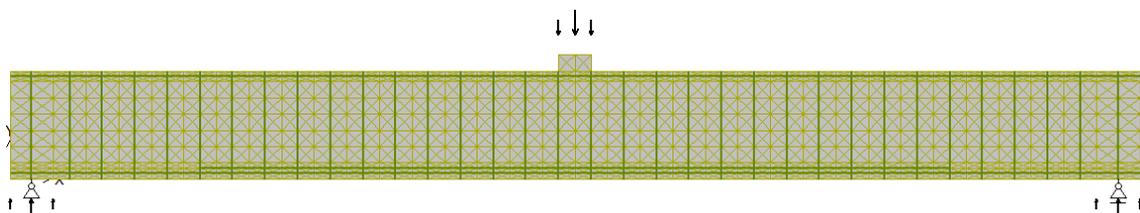


Figura 17 - Modelo utilizado no programa EvalS.

Peso próprio - O peso próprio da estrutura não foi considerado.

Apoios - Os apoios foram considerados sob tensão uniforme em toda a sua largura.

Carga F_d - A carga concentrada, aplicada a meio vão, tem uma intensidade de 0.6MN, tornando as tensões significativas ao redor do seu ponto de aplicação, neste sentido colocaram-se elementos de aço no topo da viga, por baixo da carga, por forma a uniformizar a transmissão da carga ao betão.

Dispensa de armadura longitudinal - Definiu-se que a armadura longitudinal inferior seria dispensada a 0.175L.

Recobrimento - O recobrimento considerado foi de 0.035m.

Discretização da malha de elementos CST - A discretização da malha de elementos CST na região do apoio está representada na figura 18. Os resultados obtidos foram considerados satisfatórios e não houve necessidade de uma maior discretização da malha.

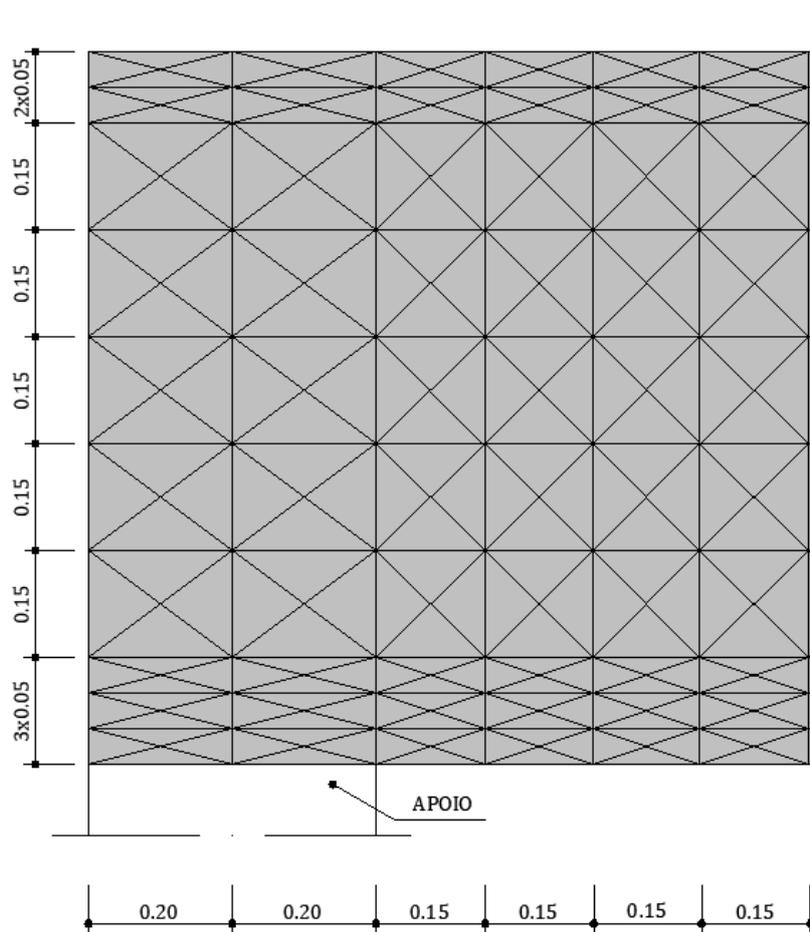


Figura 18 - Discretização da malha de elementos CST na região do apoio.

3.2.2 Materiais utilizados

Após definida a geometria do modelo de análise é necessário a caracterização mecânica dos materiais estruturais.

Os elementos finitos de betão foram analisados como C30/37 com as seguintes características:

Tabela 1 - Características dos elementos de betão no programa EvalS.

Módulo de elasticidade, E_c	31 GPa
Resistência à compressão, f_c	20 MPa
Fator de rotura frágil, n_{f_c}	0.95
Parâmetro de redução da resistência à compressão a, ver eq. (2.5)	0.8
Parâmetro de redução da resistência à compressão b, ver eq. (2.5)	170

O coeficiente de redução de resistência do betão devido à presença de extensões transversais de tração, utilizado na eq. (1.12) apresenta-se em seguida:

$$\eta(\varepsilon_j) = \frac{1}{a + b \varepsilon_j} \leq 1.0 \quad (2.5)$$

Os elementos de barra de aço foram analisados como A500NR com as seguintes características:

Tabela 2 - Características dos elementos de aço no programa EvalS.

Módulo de elasticidade, E_s	200 GPa
Tensão de cedência, f_y	435 MPa
Módulo de endurecimento, E_h	1 MPa

3.2.3 Pormenorização da viga

Cálculo de A_{sI}

É de suma importância que o mecanismo de rotura não seja condicionado pela flexão numa fase prematura do cálculo. O momento fletor máximo, a meio vão, de uma viga bi-apoiada com uma carga pontual aplicada a meio vão é:

$$M_{Ed} = F_d \times \frac{L}{4} = 0.6 \times \frac{10}{4} = 1.5 \text{ MNm} \quad (2.6)$$

Cálculo da área de armadura longitudinal inferior no meio vão:

$$\mu = \frac{M_{Ed}}{b \times d^2 \times f_{cd}} = \frac{1.5 \times 10^3}{0.4 \times 0.93^2 \times 20000} = 0.2168 \quad (2.7)$$

$$\omega = \frac{1 - \sqrt{1 - 2.42\mu}}{1.21} = 0.257 \quad (2.8)$$

$$A_s = \frac{\omega \times b \times d \times f_{cd}}{f_{yd}} \rightarrow A_s \geq 43.89 \text{ cm}^2 \quad (2.9)$$

$$A_s \text{ adoptado} = 44.17 \text{ cm}^2 (9\Phi 25)$$

Os varões de aço a meio vão foram distribuídos por duas camadas de armaduras espaçadas de 0.05m. O espaçamento mínimo entre varões da mesma camada é o maior valor de:

$$s_{min} = \{\phi_{maior}, \phi_{eq \text{ maior}}, (d_g + 0.005 \text{ m}), 0.02 \text{ m}\} = 0.025 \text{ m} \quad (2.10)$$

$$s_{adotado} = \frac{0.4 - 2 \times 0.035 - 4 \times 0.012 - 5 \times 0.025}{4} = 0.039 \text{ m} \quad (2.11)$$

$$s_{adotado} > s_{min}$$

As regras de pormenorização da distância livre entre armaduras pretendem garantir boas condições de betonagem, aderência e proteção das armaduras, questões que não influenciam a análise não linear.

Cálculo de A_{sw}

O esforço transverso máximo, no apoio, de uma viga bi-apoiada com uma carga pontual aplicada a meio vão é:

$$V_{Ed} = \frac{F_d}{2} = 0.3 \text{ M} \quad (2.12)$$

A resistência ao esmagamento das escoras comprimidas de betão, $V_{Rd,max}$, verificado pelo EC2, §6.2.3(3), considerando $\theta=30^\circ$ que se considera adequado para o nível de esforço transversal atuante:

$$V_{Rd,max} = \frac{\alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd}}{\cot\theta + \tan\theta} = \frac{1 \times 0.4 \times 0.9 \times 0.93 \times 0.53 \times 20000}{\cot(30) + \tan(30)} = 1531 \text{ kN} \quad (2.13)$$

com,

$$v_1 = v = 0.6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right) = 0.53$$

Na mesma secção do EC2, a resistencia ao esforço transversal da armadura transversal:

$$\frac{A_{sw}}{s} \geq \frac{V_{Rd,s}}{z \times \cot g(\theta) \times f_{ywd}} = \frac{0.3 \times 10^3}{0.9 \times 0.93 \times \cot g(30) \times 435 \times 10^3} = 4.76 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (2.14)$$

A quantidade de armadura transversal tem bastante influencia no ângulo da última escora, portanto, torna-se interessante utilizar, no modelo de análise, os valores exatos do cálculo da armadura transversal.

$$A_{sw \text{ adoptado}} = 4.76 \text{ cm}^2/\text{m}$$

O EC2, §9.2.2(5), preconiza a área mínima de armadura transversal através de uma percentagem mínima dada por:

$$\rho_{w,min} = \frac{0.08\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} = \frac{0.08\sqrt{30}}{500} = 0.000876 \quad (2.15)$$

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{s \times b_w} = \frac{4.76 \times 10^{-4}}{0.4} = 0.00119 \quad (2.16)$$

$$\rho_{w,min} \leq \rho_w$$

Para garantir que a resistência da viga não seria condicionada pela capacidade resistente ao esmagamento do betão tem-se de garantir que $V_{Rd,s} < V_{Rd,max}$. Note-se que a armadura adotada foi exatamente a necessária para o cálculo de $V_{Rd,s}$, $V_{Rd,s} = V_{Ed}$.

$$V_{Rd,s} < V_{Rd,max}$$

3.2.4 Cálculo de $A_{sbottle}$

As cargas pontuais horizontais que dão origem ao esforço axial provocam uma tensão de compressão elevada ao redor do seu ponto de aplicação. A dispersão destas compressões, até se tornarem tensões distribuídas linearmente, tomam o formato de uma garrafa (o conhecido efeito de bottle), havendo a necessidade de equilibrar as trações que ocorrem transversalmente.

Quando o esforço axial está centrado em relação à altura da viga as recomendações da CEB-FIP, MC 90 (1993) sugerem o seguinte modelo de escoras e tirantes ilustrado na figura 19:

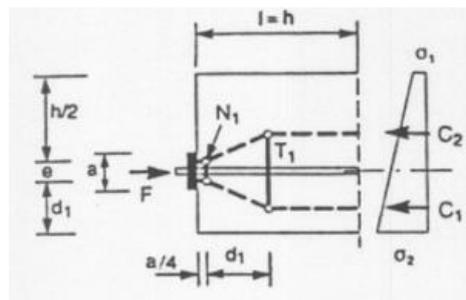


Figura 19 – Ponto de aplicação da carga excêntrico em relação ao eixo do elemento, a (CEB-FIP, MC 90, 1993).

em que,

$$T_1 = \frac{F}{4} \times \left(1 - \frac{a}{2 \times d_1} \right) \quad (2.17)$$

O ponto de aplicação ao ser centrado na direção do elemento, d_1 toma o valor de $h/2$. O valor de T_1 para cada nível de esforço axial apresenta-se em seguida:

Tabela 3 - $A_{s\text{bottle}}, y=0.525h$.

N (MN)	T_1 (kN)	A_s (cm ²)
0.2	42.5	0.98
0.4	85.0	1.96
0.6	127.5	2.93
0.8	170.0	3.91
1.0	212.5	4.89
1.2	255.0	5.86

Quando o esforço axial está perto de uma das extremidades da viga as recomendações da CEB-FIP, MC 90 (1993) sugerem o seguinte modelo de escoras e tirantes ilustrado na figura 20:

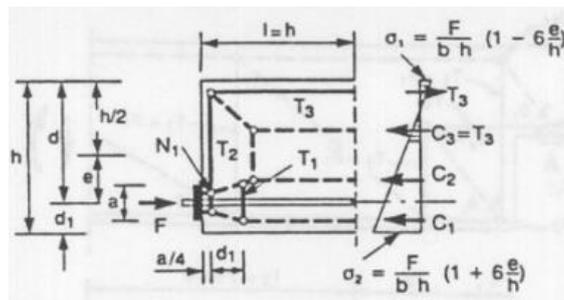


Figura 20 - Ponto de aplicação da carga excêntrica em relação ao eixo do elemento, b (CEB-FIP, MC 90, 1993).

em que,

$$T_1 = \frac{F}{4} \times \left(1 - \frac{a}{2 \times d_1}\right) \quad (2.18)$$

$$T_2 = T_3 = \frac{b \times h}{2} \times \frac{\sigma_1}{1 - \sigma_2/\sigma_1} \quad (2.19)$$

Os casos abordados neste trabalho em que a força está excêntrica em relação ao eixo do elemento tomam os valores de $d_{1,inf} = 0.125 \text{ m}$ e $d_{1,sup} = 0.175 \text{ m}$, quando o esforço axial se encontra aplicado na região inferior da viga e na região superior da viga, respectivamente.

Quando $d_{1,sup} = 0.175 m$:

Tabela 4 - $A_{sbottle, y=0.825h}$.

N (MN)	T ₁ (kN)	A _{s,T1} (cm ²)	T ₂ = T ₃ (kN)	A _{s,T2,T3} (cm ²)
0.2	28.6	0.66	23.1	0.53
0.4	57.1	1.31	46.3	1.06
0.6	85.7	1.97	69.4	1.60
0.8	114.3	2.63	92.6	2.13
1.0	142.9	3.28	115.7	2.66
1.2	171.4	3.94	138.8	3.19

Quando $d_{1,inf} = 0.125 m$:

Tabela 5 - $A_{sbottle, y=0.125h}$.

N (MN)	T ₁ (kN)	A _{s,T1} (cm ²)	T ₂ = T ₃ (kN)	A _{s,T2,T3} (cm ²)
0.2	40.0	0.92	34.7	0.80
0.4	80.0	1.84	69.4	1.60
0.6	120.0	2.76	104.2	2.39
0.8	160.0	3.68	138.9	3.19
1.0	200.0	4.60	173.6	3.99
1.2	240.0	5.52	208.3	4.79

Estas recomendações foram empregues quando a força axial estava aplicada antes da face do apoio, até à distância $h/2$ do eixo do apoio, daí em diante esta armadura foi negligenciada para não ter interferência na inclinação das compressões para o apoio.

3.2.5 Cálculo do braço interno, z

Neste trabalho, a viga do caso de estudo estará sujeita a vários níveis de esforço axial e, portanto, o z usado para o cálculo da força de tração T_a pela fórmula de equilíbrio não é constante. À medida que o esforço axial vai aumentando a linha neutra vai descendo e o valor de z diminui em conformidade. O cálculo de z foi realizado de forma simplificada, pelo estado limite último de flexão e com o pré-esforço do lado da resistência na secção situada à distância $(c + z) \times \cot g \theta$ da face interna do apoio, como apresentado na figura 21. Todas as outras áreas de armaduras não tiveram em conta esta variação de z.

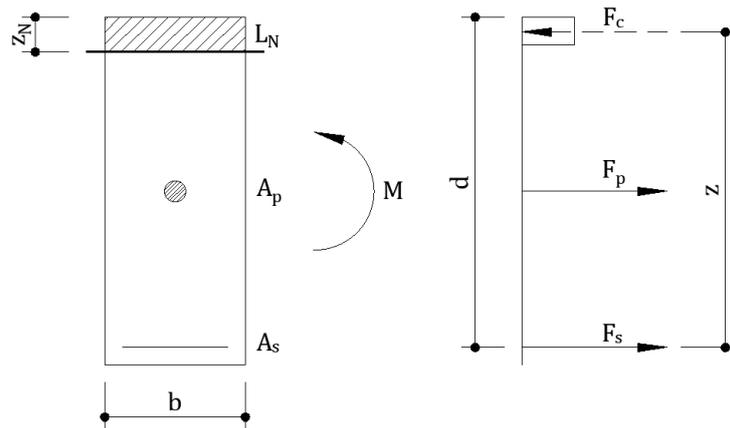


Figura 21 - Forças na secção para o cálculo de z.

Através do equilíbrio de momentos:

– Forças exteriores:

$$M_{ext} = R[a/2 + (c + z) \cdot \cot \theta] \quad (2.20)$$

com,

$$z = d - \frac{0.8 \times Z_N}{2} \quad (2.21)$$

– Forças interiores:

$$M_{int} = F_c(d_s - 0.4z_N) - F_p(d - d_p) \quad (2.22)$$

com,

$$F_c = f_{cd} \times 0.8 \times z_N \times b \quad (2.23)$$

E torna-se possível: $M_{ext} = M_{int} \rightarrow z_N \rightarrow z$

onde,

a é a largura do apoio;

b é a largura da secção;

R é a componente vertical da reação do apoio;

d é a altura útil da secção;

z_N é distância vertical da área de betão comprimido;

- θ é o ângulo de cálculo das escoras na zona corrente da viga;
- c é a distância da resultante das forças de tração à face inferior;
- z é a distância entre o eixo das tensões de tração e compressão no cálculo da flexão;
- F_p é a força introduzida pelo pré-esforço.

De notar que para as situações correntes de cálculo, em que os z 's são calculados pela análise da secção no vão, correspondente ao momento máximo, as forças obtidas pela fórmula de equilíbrio são superiores.

3.3 Segurança da região do apoio sem esforço axial

Este capítulo trata a viga apresentada anteriormente para a situação em que não existe esforço axial com o objetivo de conhecer a força de tração que ocorre à face do apoio de extremidade para o correto dimensionamento e verificação da segurança do nó CCT do apoio.

A carga é transmitida para o apoio através de uma escora com o ângulo θ_a , que depende do ângulo θ escolhido para o dimensionamento do esforço transversal na zona corrente (ver fig. 22). Da geometria do modelo de campo de tensões é possível obter o ângulo θ_a e a força de tração T_a :

$$\cot \theta_a = \frac{\frac{a}{z} + \left(\frac{z}{z} + c\right) \cot \theta}{z} = \frac{a}{2z} + \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{z}\right) \cot \theta \quad (2.23)$$

$$T_a = V_a \times \cot \theta_a \quad (2.24)$$

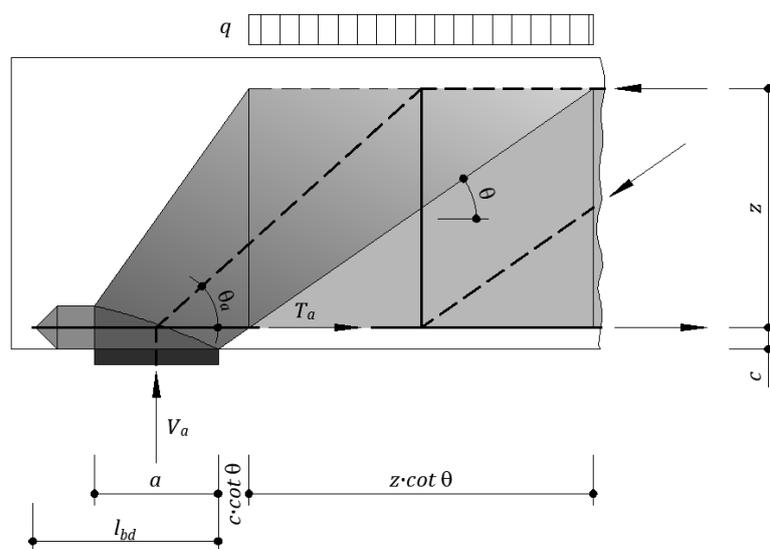


Figura 22 - Modelo de campos de tensões da zona do apoio (sem esforço axial).

Note-se que, caso se considere um apoio pontual, $a=0$, e desprezando o recobrimento, $c=0$, resulta a expressão (2.26), que corresponde ao acréscimo de armadura longitudinal devido ao esforço transversal referida na NP EN1992-1-1 em §6.2.3(7):

$$T_a = \frac{V_a}{2} \times \cotg \theta \quad (2.26)$$

Foram também consideradas outras quantidades de armaduras correspondentes às regras correntes de pormenorização de vigas. Foram assim analisadas as seguintes situações:

- Modelo com a quantidade de armadura necessária para obter a força à face do apoio correspondente ao modelo de equilíbrio, de acordo com a eq. (2.2), que corresponde neste caso a 8.10 cm^2 .
- Modelo com a quantidade de armadura necessária para obter a força à face do apoio correspondente ao modelo definido na EN1992-1-1, que corresponde neste caso a 5.97 cm^2 .
- Modelo onde se considera que 25% da armadura a meio vão é prolongada até ao apoio, que corresponde neste caso a 11.04 cm^2 .
- Modelo onde se considera que metade da armadura a meio vão é prolongada até ao apoio, que corresponde neste caso a 22.08 cm^2 .
- Modelo onde se considera que a totalidade da armadura a meio vão é prolongada até ao apoio, i.e., não é efetuada nenhuma dispensa, que corresponde neste caso a 44.17 cm^2 .

Foi estudado o seguinte caso particular indicado na Fig. 23.

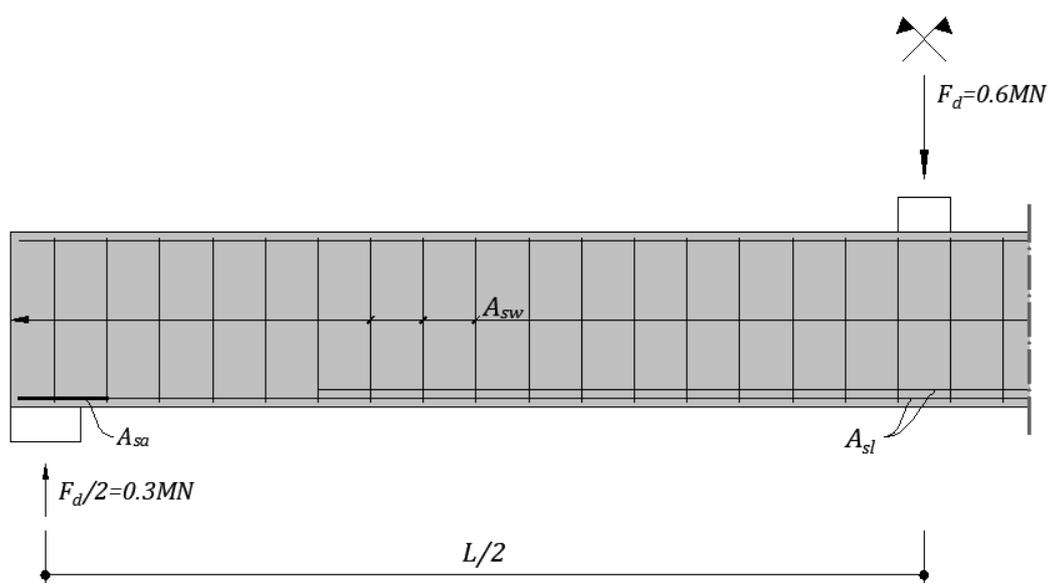


Figura 23 - Pormenorização das armaduras e das forças, nos modelos que abordam o caso sem esforço axial.

Com base em cada uma das pormenorizações efetuaram-se diversos modelos no programa EvalS Educational de modo a verificar se se atinge a carga de dimensionamento de 0.6 MN, que corresponde a uma reação no apoio de 0.3 MN.

Em seguida são apresentadas algumas ilustrações retiradas do programa EvalS Educational © (Ferreira, et al., 2017), na região do apoio, para o modelo que considera a armadura longitudinal à face do apoio correspondente à força calculada pelo modelo de equilíbrio. As figuras apresentadas são para a carga de dimensionamento e permitem, se existirem, identificar problemas em zonas localizadas. Uma avaliação destes parâmetros para a carga última da viga permite também perceber qual é o seu modo de rotura. As ilustrações são as seguintes:

- “Utilization ratio” dos elementos de aço, i.e. F_d/F_{rd} onde F_d é a força obtida diretamente do modelo e $F_{rd} = A_s * f_{yd}$, fig. 24;
- “Utilization ratio” dos elementos de betão σ_d / f_{cd} , apresentado por escala de cores, onde f_{cd} representa a resistência à compressão do betão tendo em consideração ao “compression softening” i.e. a redução da resistência à compressão devido à presença de extensões transversais de tração, fig. 25;
- Tensões principais “Stresses” dos elementos de betão, fig. 26.

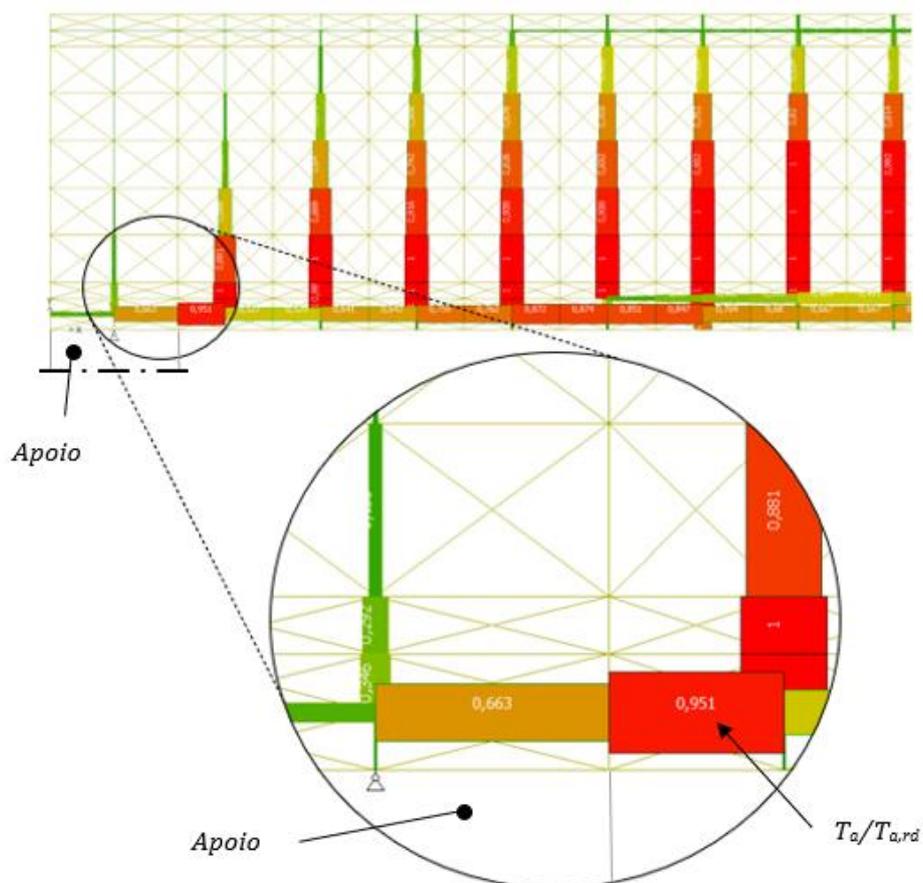


Figura 24 - “Utilization ratio” dos elementos de aço, retirado do programa EvalS.

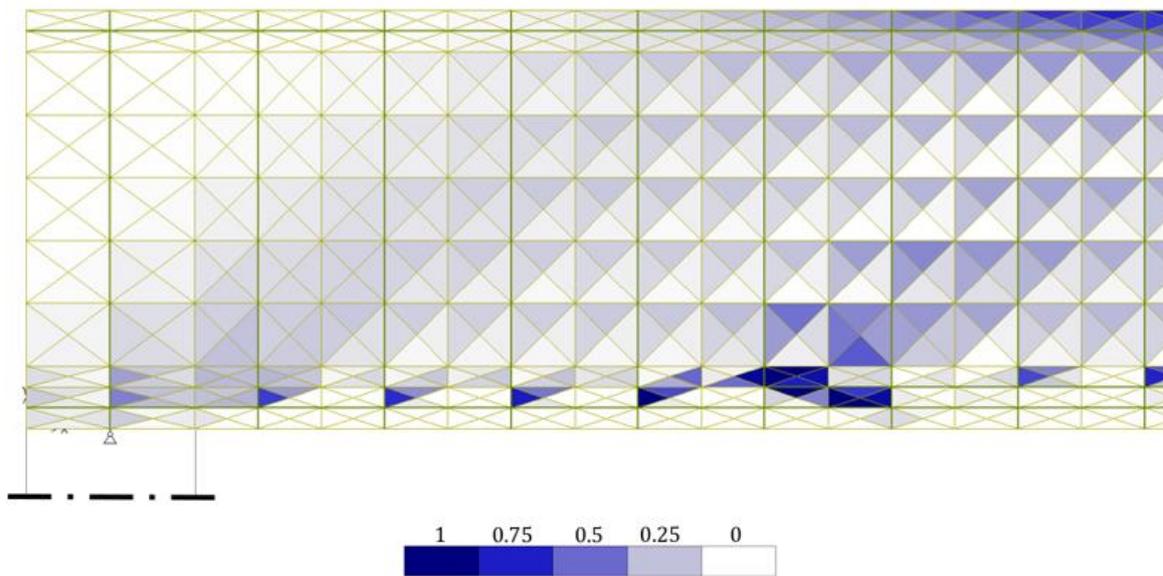


Figura 25 - "Utilization ratio" dos elementos de betão, retirado do programa EvalS.

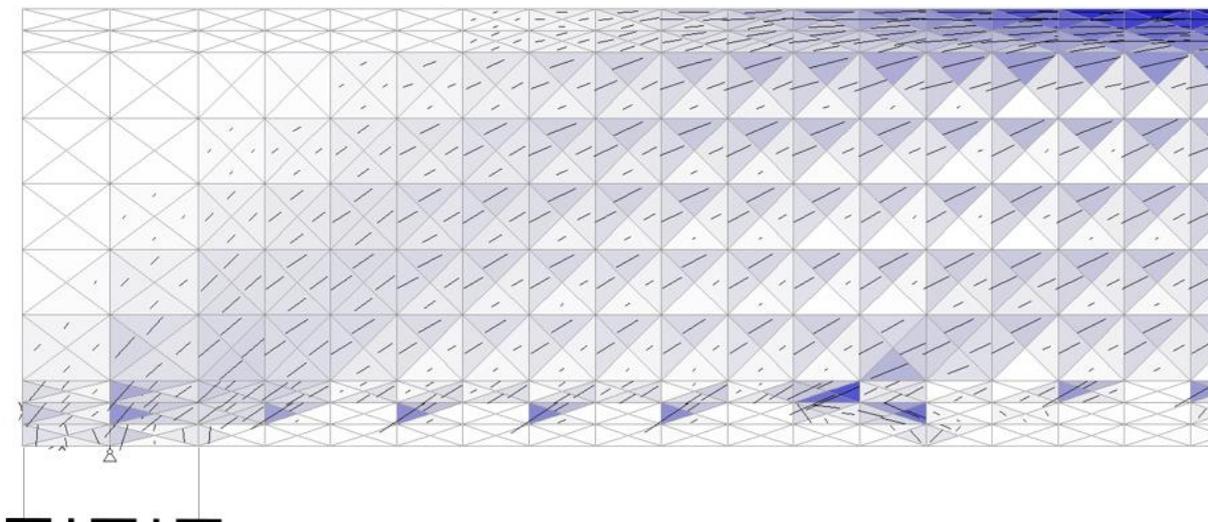


Figura 26 - "stresses" dos elementos de betão, retirado do programa EvalS

A capacidade resistente da viga, para os vários modelos de análise descritos anteriormente, apresenta-se de seguida na figura 27.

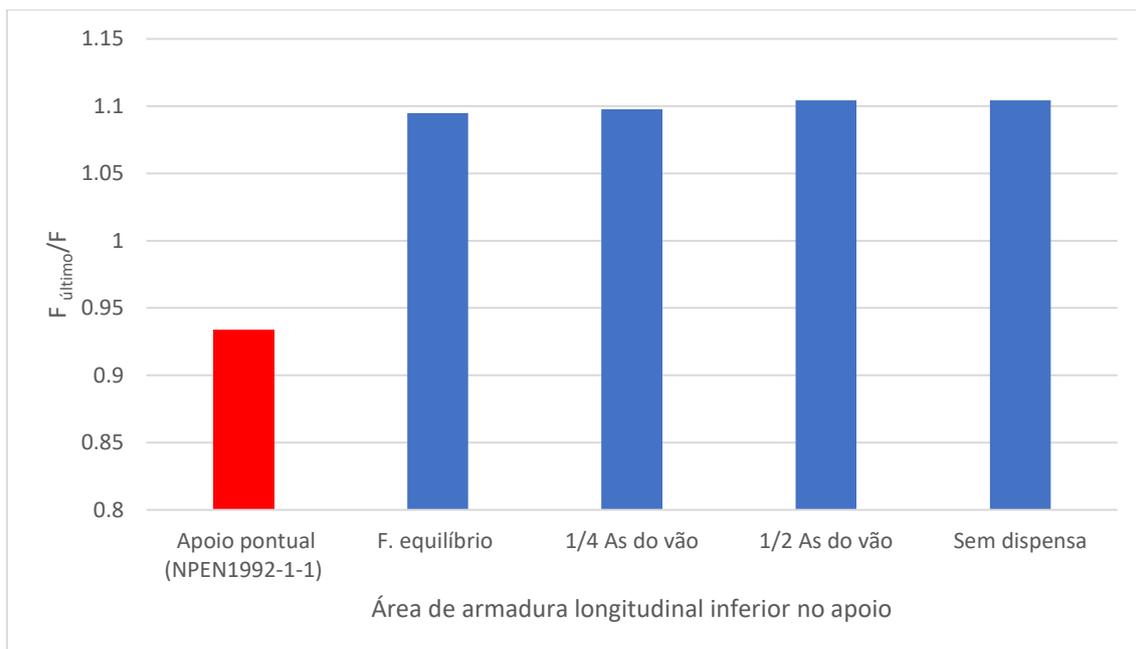


Figura 27 - Cargas últimas para várias áreas de armadura.

Nas abcissas são apresentados os vários modelos elaborados e nas ordenadas a F_u / F_d , relação entre a força última obtida da análise incremental não linear do EvalS e a carga de dimensionamento.

O valor de F_u/F_d do modelo que utiliza a armadura preconizada pela translação do diagrama de momentos e considerando um apoio pontual (de acordo com a NP EN 1992-1-1) foi de 0.93, inferior à carga de dimensionamento e, desta forma, não verifica a segurança. O F_u/F_d obtido para o modelo que utilizou a fórmula de equilíbrio foi de 1.09, superior à carga de dimensionamento, tendo sido a rotura dada pela armadura longitudinal à face do apoio. O F_u/F_d obtido para o modelo no qual se prolonga 25% da armadura de meio vão para o apoio, neste caso em particular, foi um valor muito próximo do modelo da fórmula de equilíbrio, mas ligeiramente mais elevado. Os dois últimos modelos, com metade da armadura dispensada e sem dispensa de armadura, obtiveram os mesmos valores de $F_u/F_d=1.10$, dado que para esta viga em específico, com os níveis de armadura considerados para esta pormenorização, os modelos mostrarem que o mecanismo de rotura não é o mesmo que os anteriores, a rotura passou a dar-se por flexão, ou seja, atingiu-se a tensão de cedência das armaduras a $\frac{1}{2}$ vão.

A relação entre a força instalada na armadura, quando calculada para F_d , e a sua capacidade resistente, correspondente aos modelos estudados anteriormente, está representada na fig. 28.

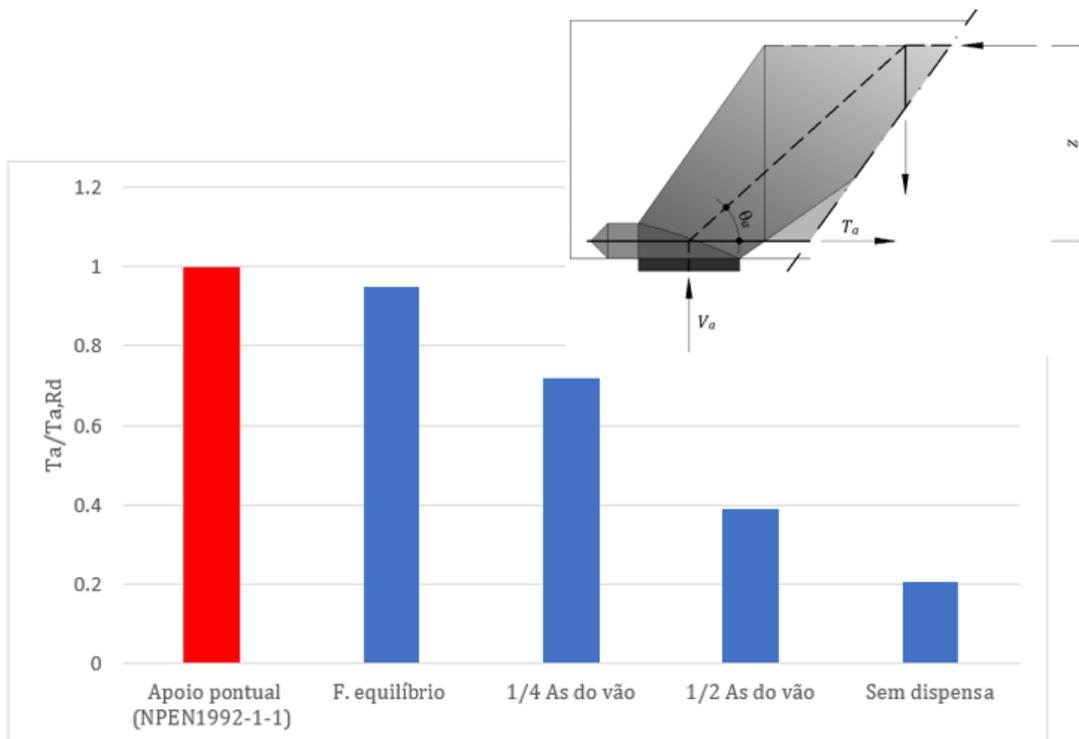


Figura 28 – Relação entre a força T_a instalada e a força T_a resistente, para várias áreas de armadura.

Quanto mais área de armadura é prolongada até ao apoio, menor é o quociente entre o resultado da força calculada pelo EvalS e a força resistente dessa área de armadura. O rácio correspondente à área de armadura calculada pela translação do diagrama de momentos da NPEN1992-1-1 é de 1.0, i.e., utiliza toda a sua capacidade resistente, como seria de esperar, devido a nem sequer atingir a carga de dimensionamento considerada, como visto na fig. 27. O resultado obtido para o modelo que utiliza a armadura calculada pela fórmula de equilíbrio foi 0.95, o que representa ainda alguma folga na resistência. Os rácios obtidos para os vários níveis de dispensa de armadura foram de 0.72, 0.39 e 0.21, para os modelos onde se prolonga 25% da armadura do vão, 50% e 100%, respetivamente.

O gráfico da fig. 29 ilustra a relação da força instalada na armadura inferior do apoio quando colocadas áreas de armaduras distintas. No eixo das ordenadas é apresentada a relação T_a/T_{a0} , em que T_a é a força obtida no modelo de análise não linear e T_{a0} é a força obtida pela aplicação da fórmula de equilíbrio. Nas abcissas encontram-se as áreas de armaduras que atingiram a carga de dimensionamento, analisadas anteriormente.

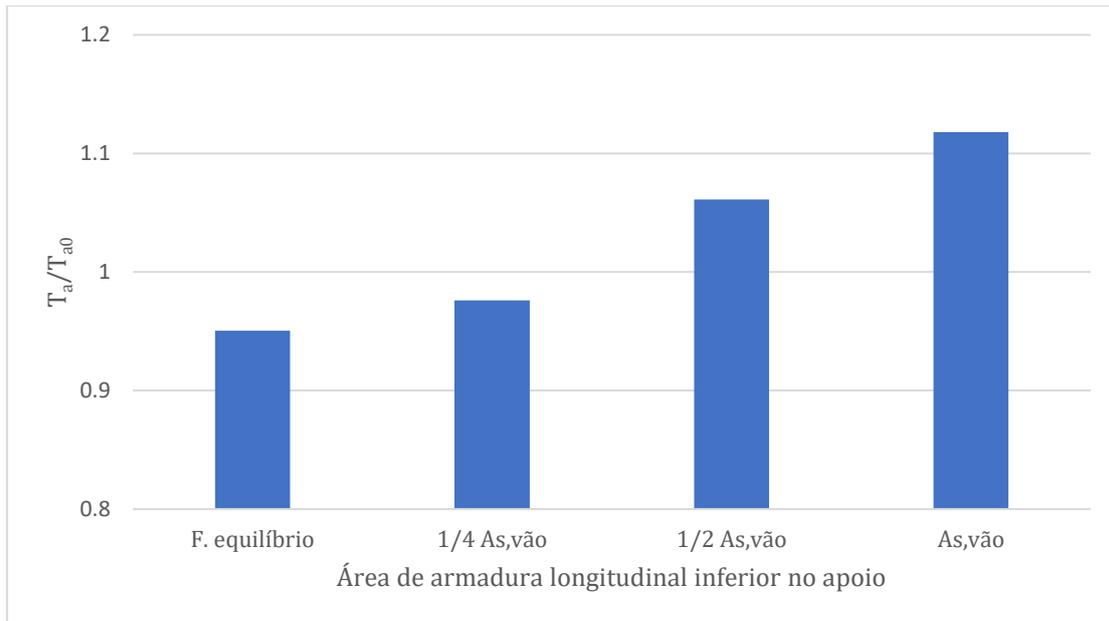


Figura 29 - Força instalada em áreas de armaduras distintas, sem esforço axial.

O valor da relação T_a/T_{a0} aumenta quando se coloca maior área de armadura à face do apoio. Os valores de T_a/T_{a0} obtidos foram 0.95, 0.98, 1.06 e 1.12 para as áreas correspondentes à área obtida pela fórmula de equilíbrio, à área onde se considera que 25% da armadura a meio vão é prolongada até ao apoio, à área onde se considera que 25% da armadura a meio vão é prolongada até ao apoio e à área onde não há qualquer dispensa, respetivamente. Na realidade o fato de se obter no modelo numérico uma força superior ao obtido pela fórmula de equilíbrio não constitui um problema, visto que a força presente na armadura é o mínimo entre a força resistente da armadura e força resistente da sua amarração.

3.4 Segurança da região do apoio com distribuição de esforço axial uniforme

Neste capítulo pretende-se analisar os modelos em que a força axial atua como uma força uniformemente distribuída à face da viga na região do apoio, o que por exemplo, representa a força numa placa de ancoragem de pré-esforço a uma distância suficientemente grande para se poder assumir que a força axial N se encontra uniformemente distribuída por toda a secção. Como referido anteriormente, considera-se que este limite se encontra aproximadamente a $2z_p$ da face lateral do apoio, baseado no princípio de Saint-Venant. Serão abordados os seguintes temas:

- Análise das compressões na região do apoio;
- Quantificação da força T_a no modelo com a quantidade de armadura necessária para obter a força à face do apoio correspondente ao modelo de equilíbrio;
- Cálculo da carga última e os modos de rotura correspondentes do modelo com a quantidade de armadura necessária para obter a força à face do apoio correspondente ao modelo de equilíbrio;

- Quantificação da força T_a nos modelos onde se consideram várias percentagens de dispensa longitudinal de armadura.

O modelo de campos de tensão e o modelo de escoras e tirantes da figura 14 sugerem que uma parte de N permite a última escora sofrer um ligeiro desvio, alterando o ângulo θ_A . A figura 30 permite comparar os campos de compressões na região do apoio com e sem esforço axial:

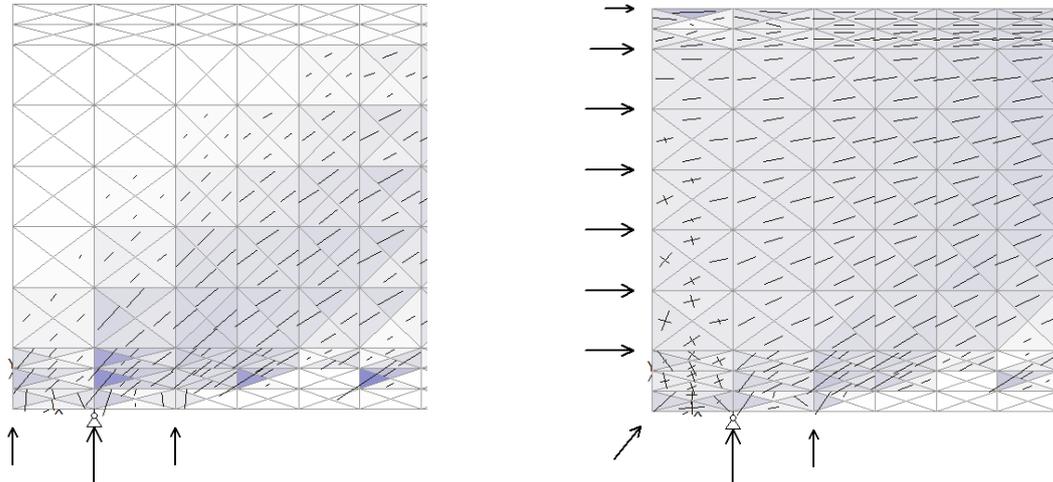


Figura 30 – Comparação entre o campo de compressões na região do apoio sem esforço axial e o campo de compressões na região do apoio com 2MPa de tensão média, à esquerda e à direita, respetivamente.

É possível identificar a mudança de inclinação do ângulo da última escora, referenciada no modelo de escoras e tirantes, quando comparado com a situação sem esforço axial.

O caso particular estudado tem por base o modelo já descrito, com a nuance da força axial, fig. 31.

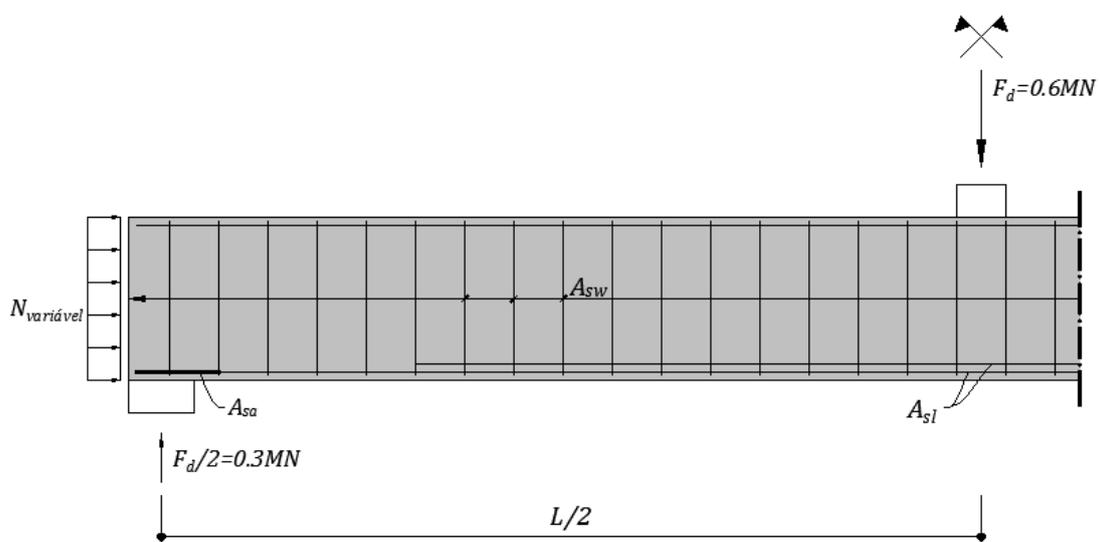


Figura 31 - Pormenorização das armaduras e das forças, nos modelos que abordam o caso de N uniforme.

Em seguida é apresentada na fig. 32 a força de tração T_a / T_{a0} , em que T_a é quantificada através do modelo que tem em conta o equilíbrio e a compatibilidade (modelo do EvalS), quando é colocada a armadura longitudinal inferior no apoio calculada pelo modelo de equilíbrio e, T_{a0} representa a força T_a calculada pela fórmula de equilíbrio quando não há qualquer contribuição de N , caso sem esforço axial.

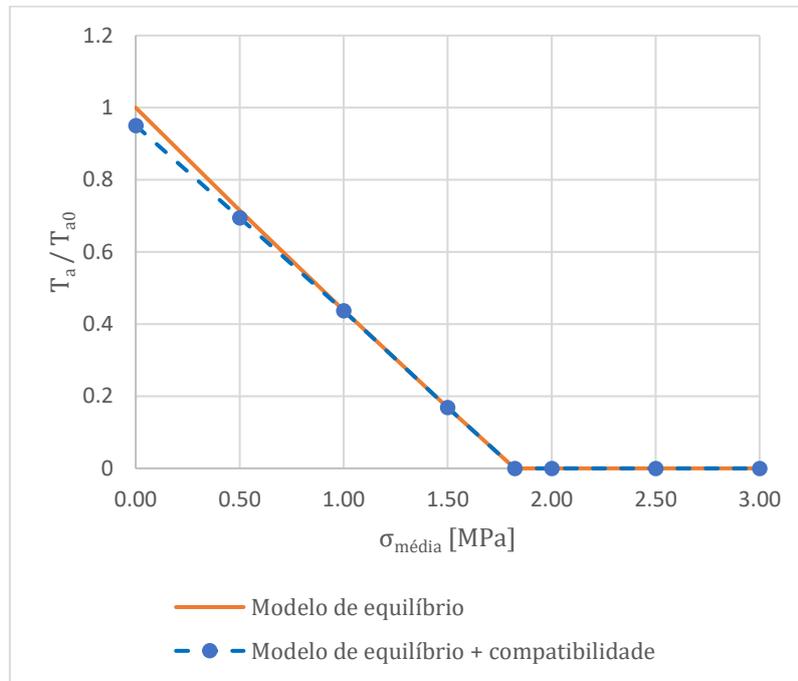


Figura 32 – T_a/T_{a0} com distribuição uniforme de tensões.

Ao aumentar a tensão média, o esforço axial contribui para diminuir a força de tração longitudinal inferior no apoio, até deixar de haver trações quando a secção está completamente comprimida. Os resultados obtidos para a carga de dimensionamento no *modelo de equilíbrio + compatibilidade* são bastante semelhantes aos resultados obtidos pelo *modelo de equilíbrio*. A pequena diferença entre os dois modelos quando não há esforço axial, que se vai atenuando enquanto a tensão média vai aumentando, resulta de, no dimensionamento dos estribos, se ter adotado um z aproximado inferior ao z sem esforço axial. Enquanto a tensão média vai aumentando, o z vai baixando, tornando o z adotado mais próximo do z dos modelos e com isto aproximando os resultados do gráfico da figura 32. Ao calcular os estribos com o z de cada nível de tensão média, os resultados no modelo de equilíbrio + compatibilidade e o cálculo da força de tração do modelo de equilíbrio coincidem.

Embora a figura 32 mostre a grande proximidade dos resultados obtidos para a carga vertical de dimensionamento, é possível incrementar ainda mais a carga vertical até à rotura da viga. A capacidade resistente última da viga para os vários níveis de tensão média, onde as intensidades das forças aumentam por incrementos sucessivos, apresentam-se de seguida na figura 33.

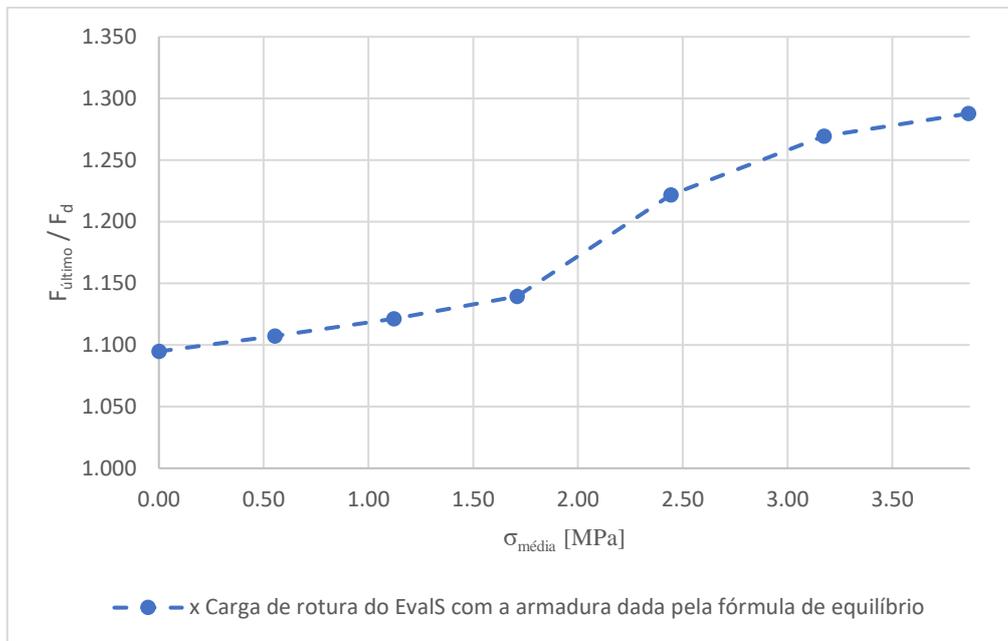


Figura 33 - $F_{\acute{u}ltimo}/F_d$ para as diversas tensões médias com distribuição uniforme de tensões.

No gráfico fica visível a latente margem de segurança em relação à fórmula de equilíbrio para esta viga em específico. A margem de segurança apresenta uma tendência linear e crescente sendo a rotura dada por plastificação da armadura do apoio, que foi calibrada de acordo com a fórmula de equilíbrio. Ao passar para o patamar onde se verifica que a viga está totalmente comprimida, existe um aumento abrupto na resistência. Este aumento corresponde ao facto de o mecanismo de rotura alterar, ao passar deste ponto o modo de rotura passa a ser por flexão a $\frac{1}{2}$ vão da viga.

Em seguida apresentam-se os gráficos de força - deformação acompanhado do “utilization ratio” das armaduras para duas situações distintas de esforço axial, uma a 0,55MPa (fig. 34) e outra a 3.2MPa (fig. 35), situações onde a região onde é calculado T_a está tracionado e outra onde a viga está totalmente comprimida, respetivamente.

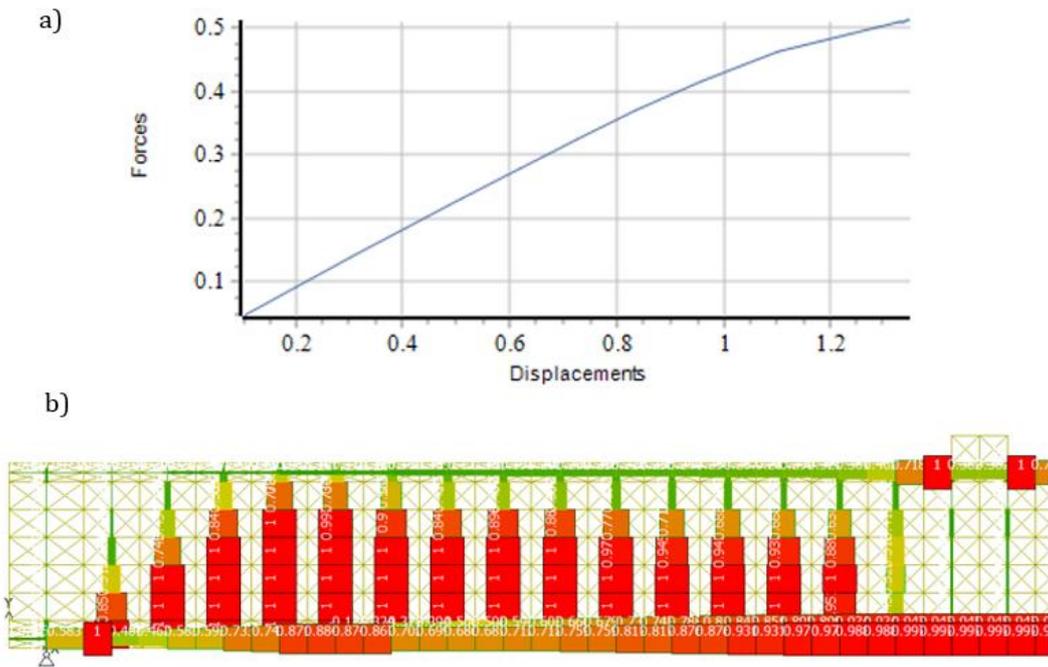


Figura 34 - a) Gráfico força-deformação, $\sigma_{\text{médio}}=0.55\text{MPa}$; b) “utilization ratio” das armaduras, $\sigma_{\text{médio}}=0.55\text{MPa}$.

A figura 34, retirada do programa de calculo EvalS educational, mostra que no caso da viga sujeita a $\sigma_{\text{médio}}=0.55\text{MPa}$ não apresenta patamar de cedência. Embora as armaduras longitudinais a meio vão estejam muito perto da plastificação, a rotura é dada pela plastificação de T_a , tornando o mecanismo de rotura numa rotura frágil.

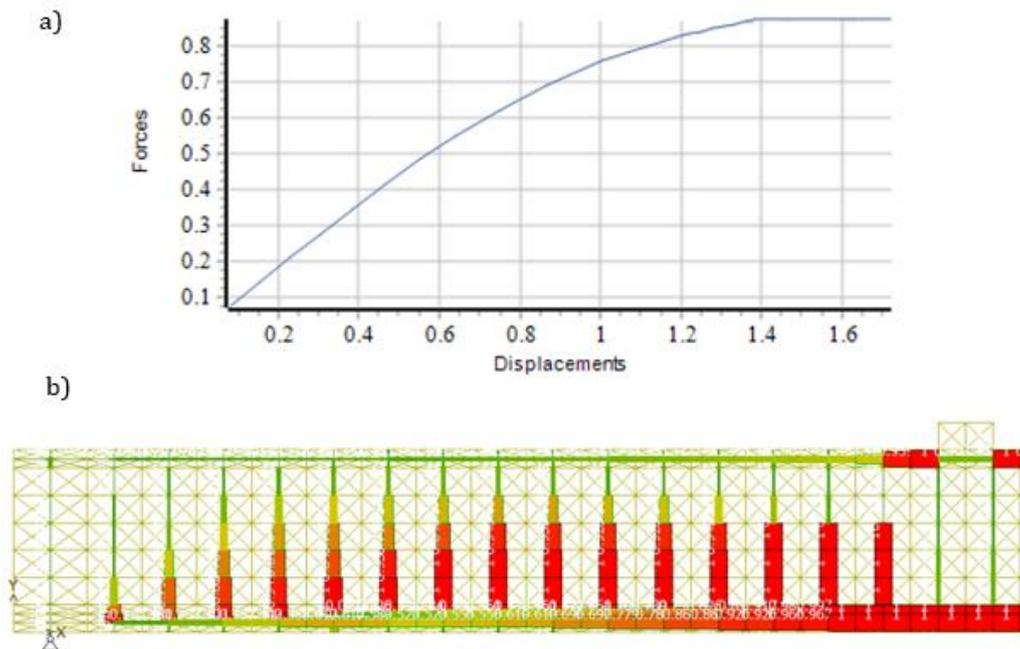


Figura 35 - a) Gráfico força-deformação, $\sigma_{\text{médio}}=3.2\text{MPa}$; b) “utilization ratio” das armaduras, $\sigma_{\text{médio}}=3.2\text{MPa}$.

A figura 35, retirada do programa de calculo EvalS educational, mostra que no caso da viga sujeita a $\sigma_{\text{médio}}=3.2\text{MPa}$ apresenta patamar de cedência. Não existe armadura na zona onde é calculada a força T_a devido à região estar comprimida, portanto, o mecanismo de rotura passa a ser por flexão a $\frac{1}{2}$ da viga. É possível observar na figura 35 b) que as armaduras longitudinais estão plastificadas, este tipo de rotura trata-se de uma rotura dúctil.

Na secção 3.2 já foi abordada a força T_a para vários níveis de dispensa, quando se tratava do caso sem esforço axial. Em seguida na figura 36, é mostrada a força T_a/T_{a0} em cada nível de tensão média obtida para os seguintes modelos de dispensa de armadura:

- Modelo onde se considera que 25% da armadura a meio vão é prolongada até ao apoio.
- Modelo onde se considera que metade da armadura a meio vão é prolongada até ao apoio.
- Modelo onde se considera que a totalidade da armadura a meio vão é prolongada até ao apoio, i.e., não é efetuada nenhuma dispensa.

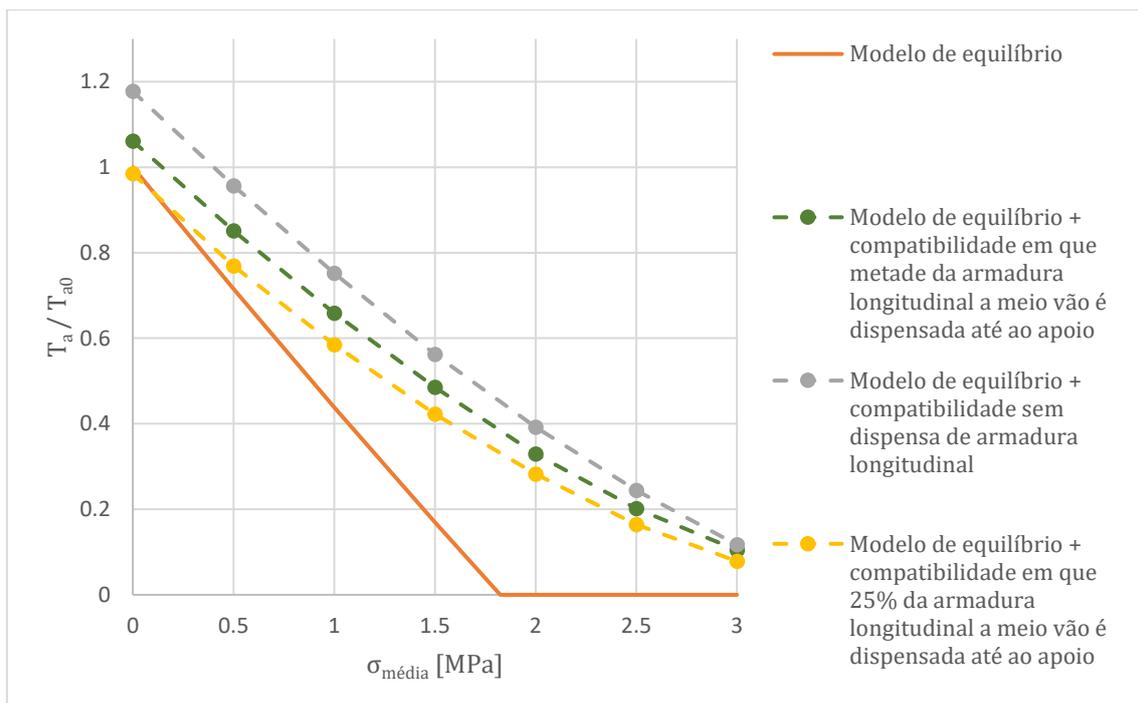


Figura 36 – T_a/T_{a0} para várias dispensas de armaduras.

Ao aumentar a tensão média, a força de tração T_a vai diminuindo até a peça estar comprimida nessa zona, seguindo a tendência dos resultados da fórmula de equilíbrio, no entanto, mesmo quando a peça já se encontra comprimida a análise fisicamente não linear revela que há trações nas armaduras. Este fenómeno vai de encontro à discussão anterior em 3.2, pois a carga procura

o caminho que conduz à menor energia interna, pelo que existindo mais área de armadura, é energeticamente mais favorável mobilizar mais a força de tração. A diferença da fórmula de equilíbrio para os modelos com várias dispensas de armaduras analisados torna-se cada vez mais acentuado, devido à diferença entre a armadura necessária e a que está efetivamente nos modelos ser cada vez maior.

3.5 Segurança da região do apoio com distribuição de esforço axial não uniforme

Em seguida é importante estudar o comportamento da força de tração longitudinal para casos em que a força axial está aplicada a uma distância pequena da face posterior do apoio e, portanto, não pode ser considerada uma distribuição uniforme de tensões. Quando a força está aplicada para além de $2z_p$ toda a sua contribuição deve ser considerada para diminuir a força T_a , todavia, quando entramos na região entre de $2z_p \leq a_p \leq -a$ apenas uma porção da contribuição deve ser assumida, figura 37.

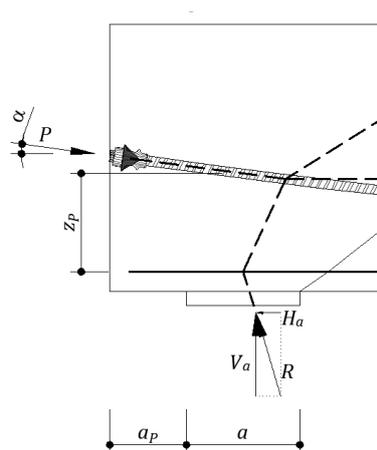


Figura 37 - Região da variação de contribuição da força axial.

Para uma mais completa análise foram criados 3 modelos distintos da altura de aplicação da força horizontal, divididos em subcapítulos:

- Um modelo onde a força equivalente se situa a aproximadamente meia altura da secção;
- Um modelo onde a força equivalente se situa perto da fibra inferior da viga;
- Um modelo onde a força equivalente se situa perto da fibra superior da viga.

Em cada altura de aplicação da carga fez-se variar a tensão média de 0 até 3MPa e colocou-se a força axial em várias posições na direção longitudinal, distanciadas de $0.3h$ a $0.4h$, começando em

1.8h para trás do centro do apoio e até 2.0h para a frente do centro do apoio. Numa tentativa simular adequadamente a placa de aplicação da carga axial e de não criar tensões muito elevadas em redor do ponto de aplicação, a força horizontal foi dividida em duas forças.

Neste capítulo serão abordados os seguintes temas:

- Quantificação da força T_a no modelo com a quantidade de armadura necessária para obter a força à face do apoio correspondente ao modelo de equilíbrio;
- Estimativa da carga última para o modo de rotura correspondente à plastificação da armadura longitudinal inferior do apoio, no modelo com a quantidade de armadura necessária para obter a força à face do apoio correspondente ao modelo de equilíbrio.
- Apresentação dos campos de compressões na região do apoio.

Os eixos das abcissas das figuras ilustradas daqui em diante, referentes à quantificação da força T_a e à previsão da carga última, estão organizados de acordo com a figura 38. Os valores positivos de a_p/h estão orientados da face exterior do apoio para o centro da viga, enquanto os valores negativos tomam o sentido inverso.

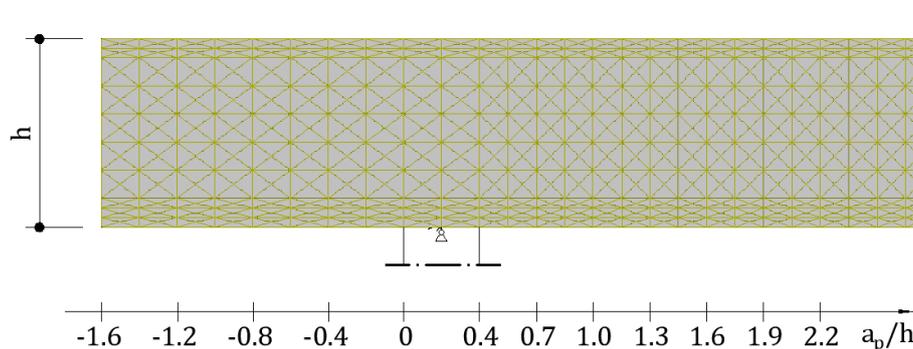


Figura 38 - Valores das abcissas para cada ponto de aplicação da carga axial.

Mais adiante, irá se constatar que geralmente as armaduras não estão em cedência para a carga de dimensionamento e, portanto, têm alguma folga na sua resistência. Seria possível incrementar ainda mais a carga vertical a que a viga está sujeita até plastificar a armadura inferior no apoio. Com esta premissa é possível prever a carga última para o modo de rotura de plastificação da armadura T_a , não esquecendo que a plastificação não é o valor exato de rotura devido à possibilidade de se alterar a inclinação da última escora, analogamente seria como passar de uma inclinação da última escora de estado limite de serviço para estado limite último, no entanto, esta

é uma hipótese conservativa. A estimativa da carga última para o modo de rotura estudado pode ser calculada da seguinte forma:

$$F_{\text{último est.}} = \frac{1}{\frac{T_a}{T_{a,Rd}}} \quad (2.27)$$

Relembra-se mais uma vez que A_{sbottle} apenas foi considerada até quando esta se sobrepõe com a armadura transversal, daí em diante considerou-se apenas a armadura transversal. Nesse sentido os modelos estudados são divididos em 2 pormenorizações distintas, uma contém a armadura A_{sbottle} para dispersar as compressões, utilizada até $h/2$, antes do eixo do apoio, e a outra não dispõe desta armadura, de $h/2$ antes do eixo do apoio para a frente.

3.5.1 Força pontual aplicada aproximadamente a meia altura da viga

Neste capítulo será analisada a situação em que a resultante da força axial pontual se localiza a cerca de meia altura da secção, sendo que a distância entre as duas forças horizontais foi de $0.15h$.

Como referido em 3.2.4, o valor de A_{sbottle} para os modelos estudados nesta secção estão apresentados na Tabela 3.

A pormenorização em que a carga aplicada se encontra até $h/2$ do eixo do apoio e a pormenorização em que a carga aplicada se encontra a menos de $h/2$ do eixo do apoio são apresentadas em seguida, respetivamente, fig. 39 e fig. 40.

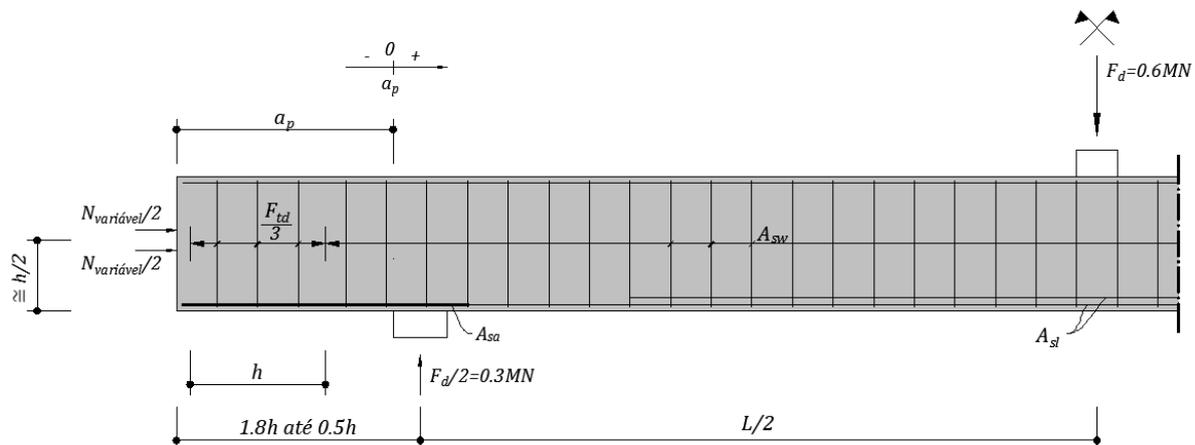


Figura 39 - Pormenorização da viga, $y=0.525h$, $a_p/h > h/2$ do eixo do apoio.

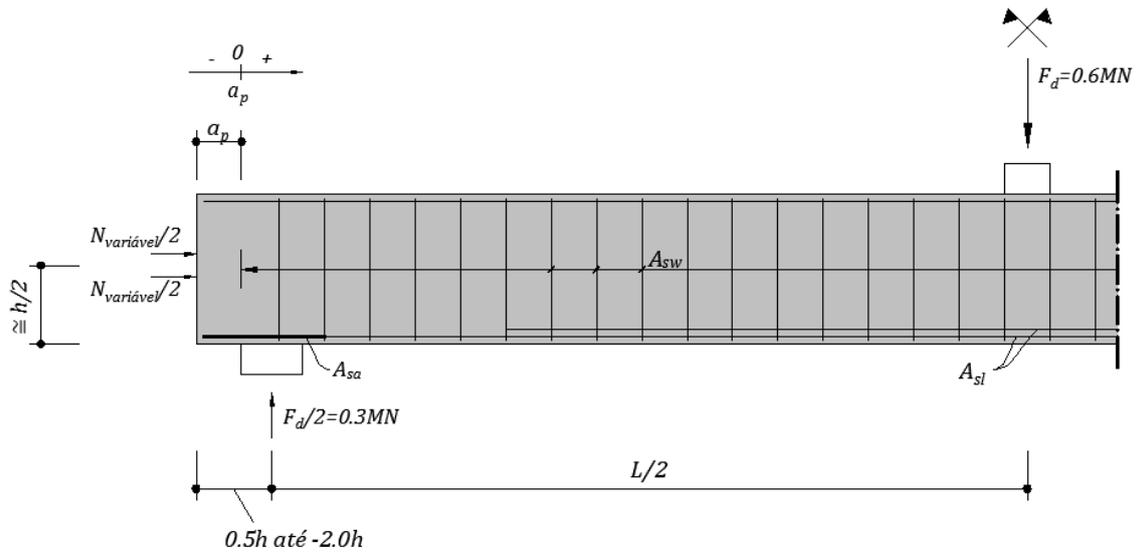


Figura 40 - Pormenorização da viga, $y=0.525h$, $a_p/h < h/2$ do eixo do apoio.

Em seguida na figura 41 é apresentada a quantificação da força T_a/T_{a0} , onde T_{a0} é a força obtida pela expressão de equilíbrio na situação em que não existe esforço axial, e T_a é a força obtida através do modelo que tem em conta o equilíbrio e a compatibilidade, com a tensão média de 1.5MPa. A armadura longitudinal inferior no apoio colocada foi calculada pelo modelo de equilíbrio para cada posição longitudinal da força horizontal.

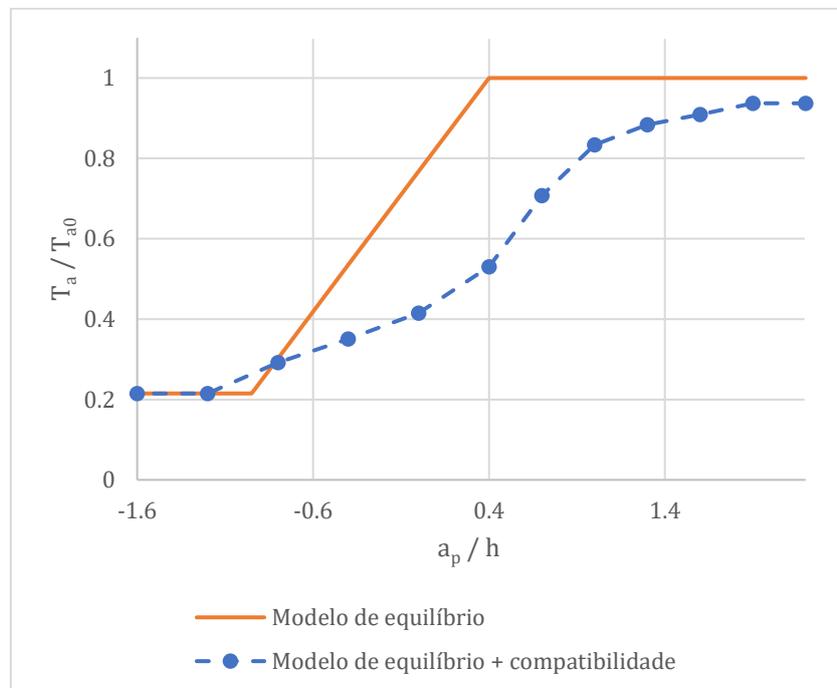


Figura 41 - Quantificação da força, $\sigma_{média}=1.5MPa$, $y=0.525h$.

O gráfico da figura 41 admite três intervalos com comportamento distintos:

- $a_p/h \leq -2z_p/h$;
- $-2z_p/h < a_p/h < 1.6$;
- $a_p/h \geq 1.6$.

em que,

$$z_p \approx \frac{h}{2} \rightarrow \frac{2z_p}{h} \approx 1$$

Quando a força concentrada está aplicada a uma distância superior a $2z_p$ da face externa do apoio, a força T_a é semelhante às análises feitas anteriormente, admitindo um esforço axial uniforme na face da viga.

A compressão dada pela força concentrada deixa de ter contribuição quando aplicado a uma distância superior a $a_p/h=1.6$ da face exterior do apoio, ou seja, caímos na situação da secção 3.3. A diferença no gráfico a partir de 1.6 entre o *modelo de equilíbrio* e o *modelo de equilíbrio + compatibilidade*, pode ser devido ao fato da armadura transversal ser ligeiramente superior, pois esta foi calculada para uma situação sem esforço axial.

Para a situação da força horizontal aplicada a $-2z_p/h < a_p/h < 1.6$, existe uma diferença entre os dois modelos. A força T_a obtida pelos modelos fisicamente não lineares acompanham a tendência da aproximação assumida para a fórmula de equilíbrio com contribuição linear do esforço axial, embora se verifique algum afastamento. No entanto, a aproximação assumida é simples e conservativa, pelo que se considera que é adequada para efeitos de aplicação prática.

Para melhor compreensão dos resultados, em seguida apresentam-se os campos de tensões e o “utilization ratio” das armaduras na região do apoio para a carga de dimensionamento, de um ponto de cada intervalo da figura 41. Em anexo encontram-se os campos de tensões e o “utilization ratio” das armaduras até ao meio vão. Os pontos escolhidos de cada intervalo foram:

- $a_p/h \leq -2z_p/h \rightarrow a_p/h = -1.2$, fig. 42 e fig. 45;
- $-2z_p/h < a_p/h < 1.6 \rightarrow a_p/h = 0.4$, fig. 43 e fig. 46;
- $a_p/h \geq 1.6 \rightarrow a_p/h = 1.9$, fig. 44 e fig. 47.

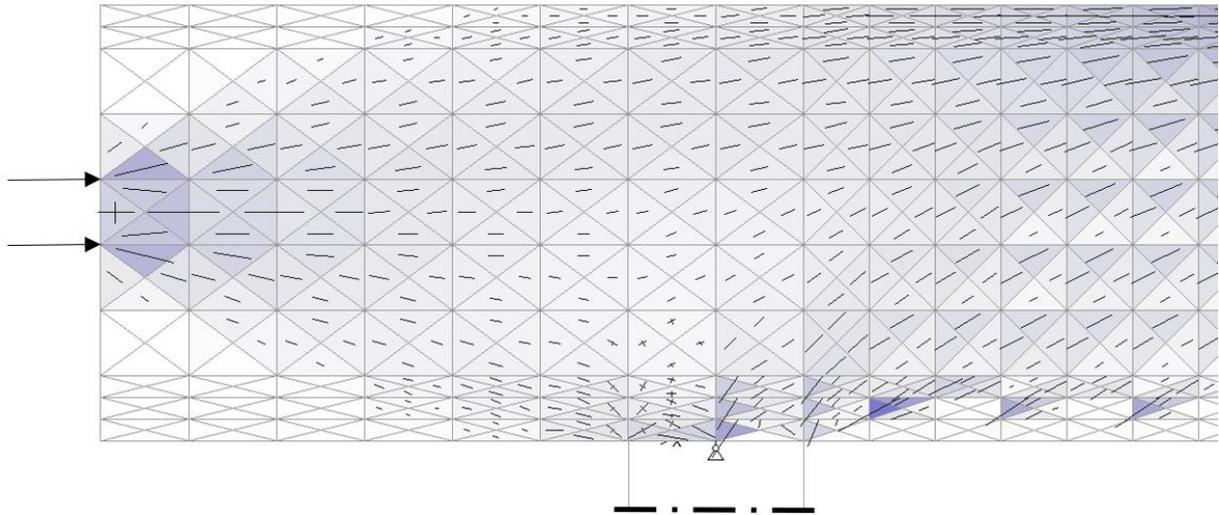


Figura 42 - Campo de tensões, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$, $a_p/h=-1.2$.

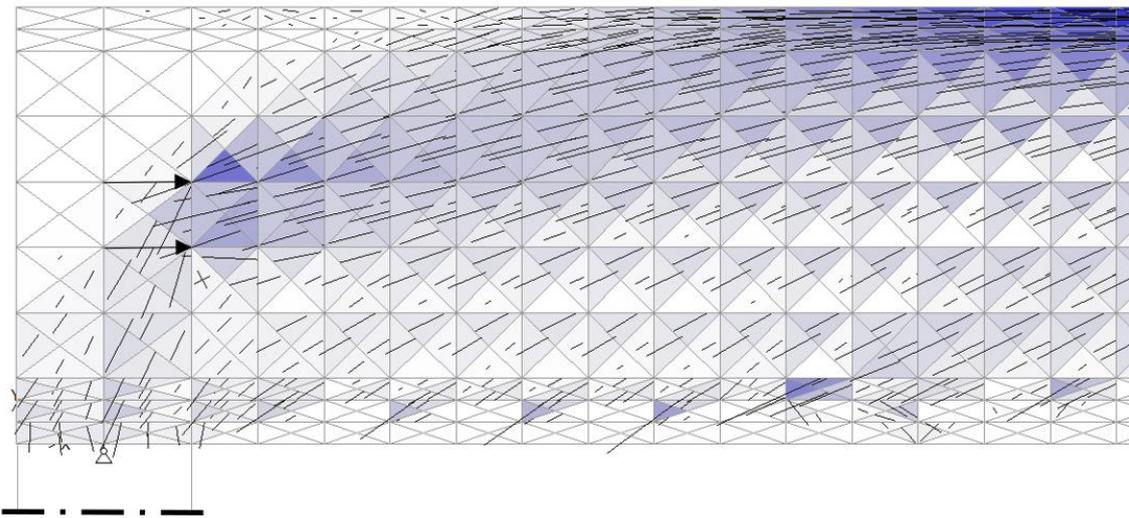


Figura 43 - Campo de tensões, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$, $a_p/h=0.4$.

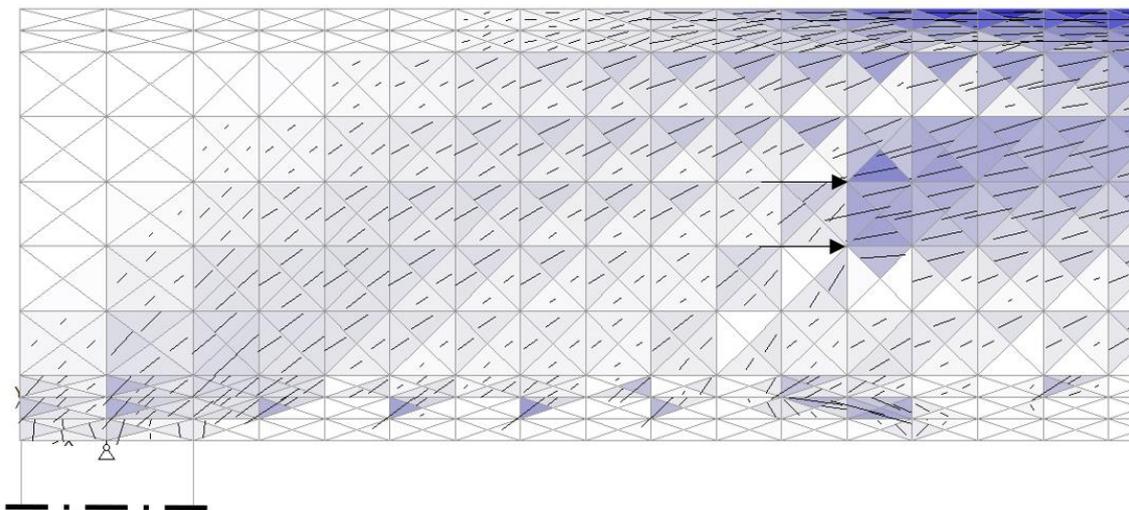


Figura 44 - Campo de tensões, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$, $a_p/h=1.9$.

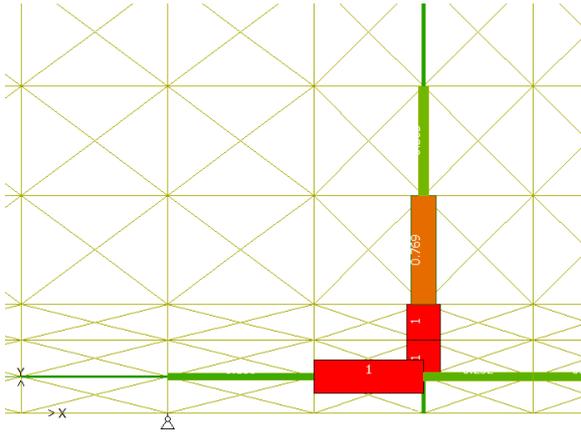


Figura 45 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{m\u00e9dia}=1.5MPa$, $y=0.525h$, $a_p/h=-1.2$.

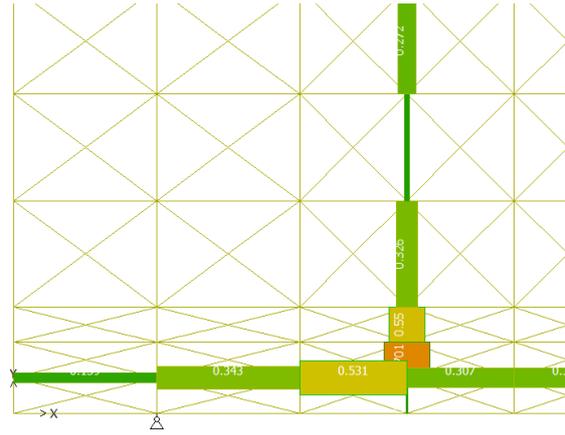


Figura 46 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{m\u00e9dia}=1.5MPa$, $y=0.525h$, $a_p/h=0.4$.

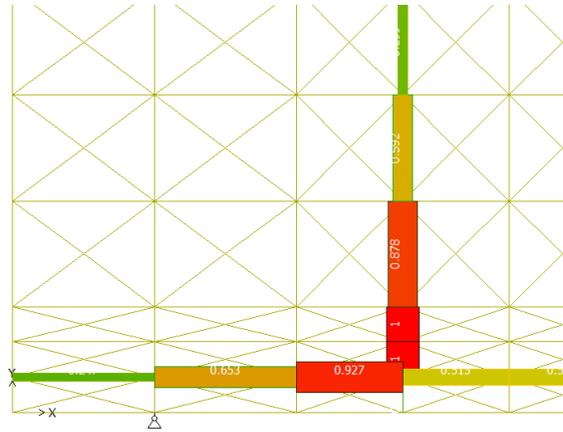


Figura 47 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{m\u00e9dia}=1.5MPa$, $y=0.525h$, $a_p/h=1.9$.

Em seguida apresentam-se os gr\u00e1ficos da quantifica\u00e7\u00e3o da for\u00e7a T_a/T_{a0} com v\u00e1rios n\u00edveis de tens\u00e3o m\u00e9dia, resultantes da an\u00e1lise do modelo que tem em conta o equil\u00edbrio e a compatibilidade. A armadura longitudinal inferior no apoio colocada foi calculada pelo modelo de equil\u00edbrio para cada posi\u00e7\u00e3o longitudinal da for\u00e7a horizontal e utilizaram-se as pormenoriza\u00e7\u00f5es referidas.

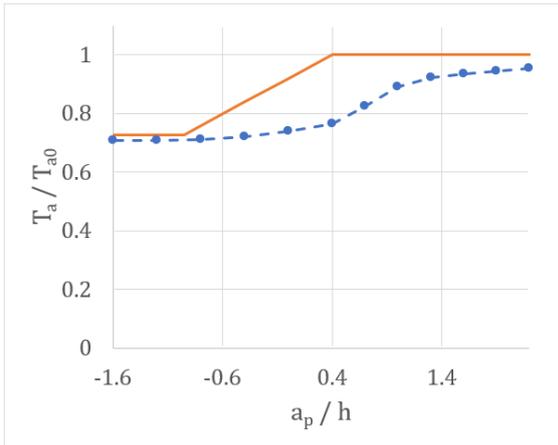


Figura 48 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=0.5MPa$, $y=0.525h$.

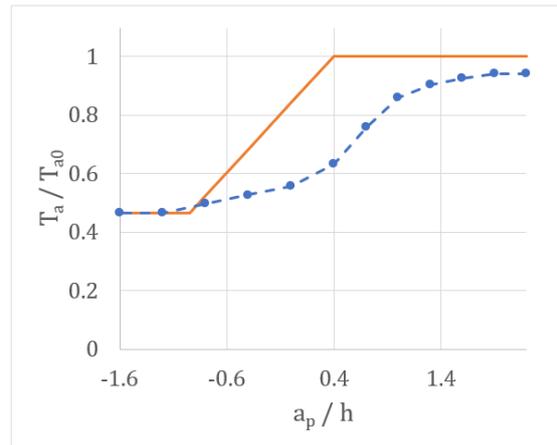


Figura 49 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=1.0MPa$, $y=0.525h$.

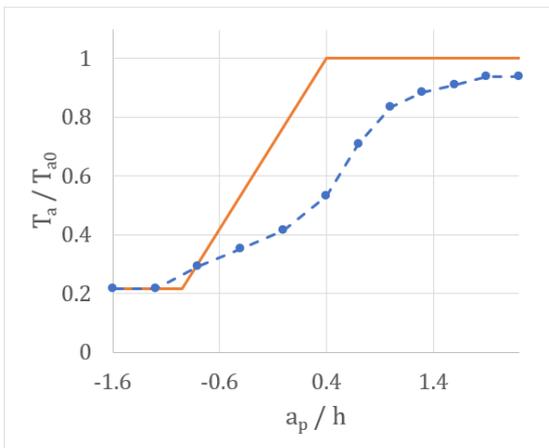


Figura 50 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=1.5MPa$, $y=0.525h$.

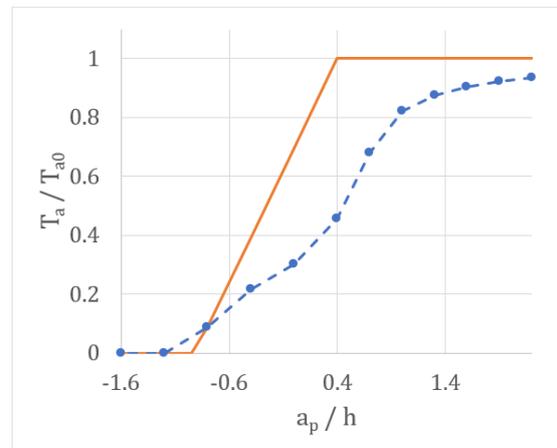


Figura 51 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=2.0MPa$, $y=0.525h$.

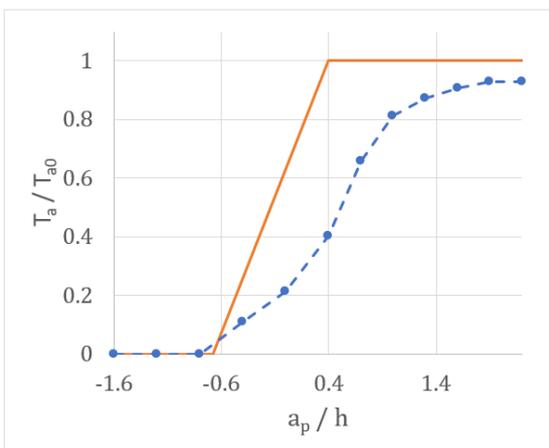


Figura 52 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=2.5MPa$, $y=0.525h$.

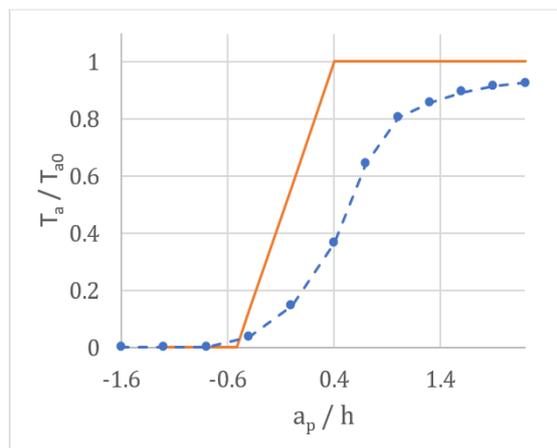


Figura 53 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=3.0MPa$, $y=0.525h$.

— Modelo de equilíbrio
 - ● - Modelo de equilíbrio + compatibilidade

Os gráficos das figuras 48-53 mostram que os modelos das análises fisicamente não lineares têm uma tendência qualitativamente semelhante ao obtido pela fórmula de equilíbrio. Em distâncias do ponto de aplicação superior a $2z_p$ da face externa do apoio os dois modelos praticamente coincidem nos resultados obtidos. Os resultados dos modelos da análise fisicamente não linear seguem a tendência de crescimento na mesma zona que na fórmula de equilíbrio, apesar de terem uma expressão mais contida, e quando o ponto de aplicação do esforço axial se afasta da face do apoio (para a direita), os resultados da força T_a converge para o caso sem esforço axial.

Quando se obtém toda a contribuição do esforço axial, i.e. a carga axial está aplicada a uma distância superior a $2z_p$ da face externa do apoio e para uma tensão média de 0.5MPa, existe uma contribuição de 30% em relação à situação sem esforço axial. Quanto maior é a tensão média maior é esta contribuição, tomando os valores 54% e 79% para tensão média de 1.0MPa e 1.5MPa, respetivamente. Na presença de $\sigma_{média} = 2.0\text{MPa}$ e para tensões mais elevadas, a região onde é calculada a força T_a passa a estar à compressão e deixa de haver a necessidade de armadura.

Pelas figuras 46 e 47 apresentadas anteriormente, é possível observar que as armaduras não estão em cedência, o que dá aso a alguma folga entre a carga de dimensionamento, F_d , e a carga última, $F_{último}$, correspondente à rotura por plastificação da armadura inferior do apoio.

Em seguida apresentam-se os gráficos com a aplicação da fórmula (2.26) para os vários níveis de tensão média estudados, permitindo realizar a previsão da carga última para o modo de rotura por plastificação da armadura longitudinal inferior no apoio, fig. 54-59.

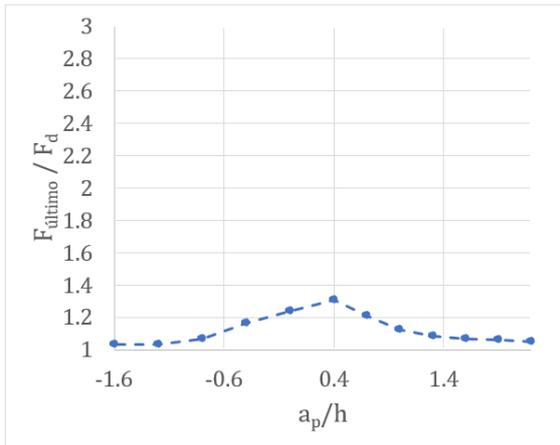


Figura 54 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=0.5\text{MPa}$, $y=0.525h$.

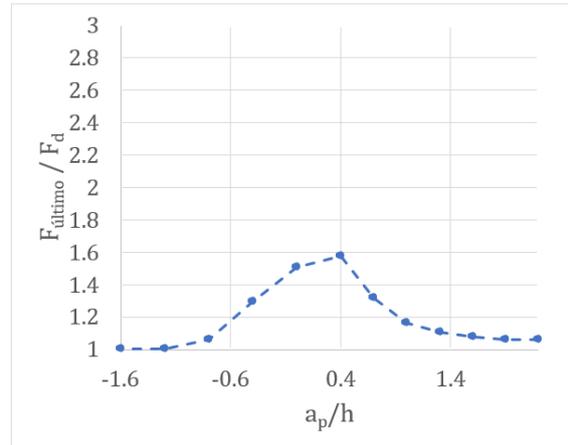


Figura 55 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=1.0\text{MPa}$, $y=0.525h$.

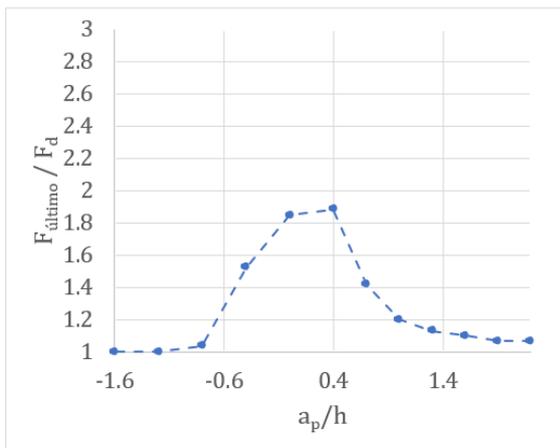


Figura 56 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.525h$.

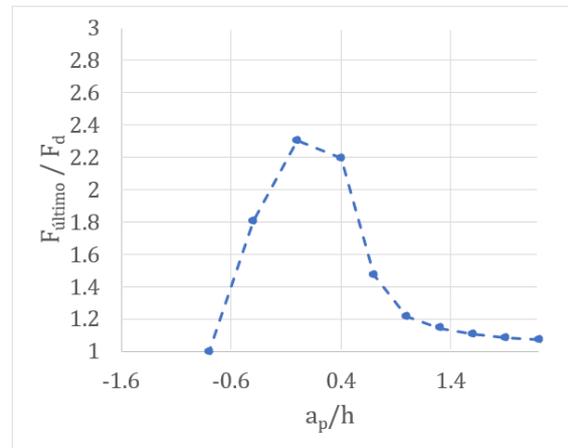


Figura 57 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=2.0\text{MPa}$, $y=0.525h$.

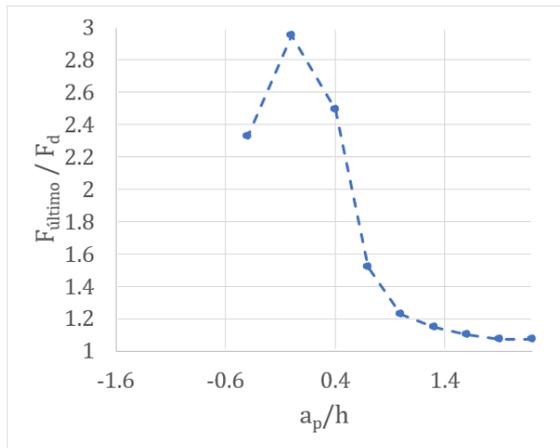


Figura 58 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=2.5\text{MPa}$, $y=0.525h$.

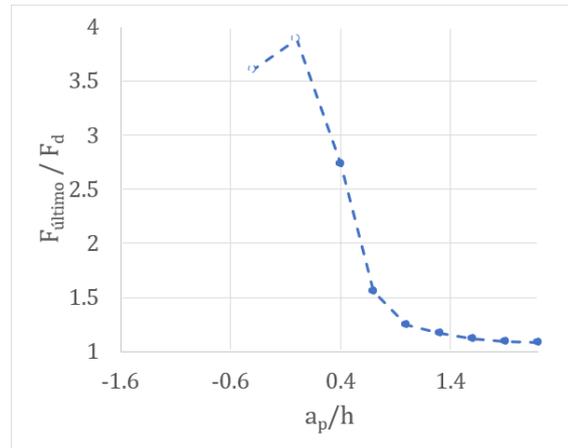


Figura 59 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.525h$.

—●— Modelo de equilíbrio + compatibilidade

Quando a aplicação do esforço axial se encontra a uma distância superior a $2z_p$ da face do apoio, neste caso a aproximadamente $a_p/h=1$, a carga última prevista ronda uma margem de segurança de 3%.

Quando a aplicação da força axial se aproxima da região do apoio, existe um aumento desta margem, que atinge o seu pico na face interna ou na face externa do apoio, acentuando-se ainda mais nas tensões médias mais elevadas. Os valores dos picos da margem de segurança são 31%, 58%, 89%, 130%, 195%, 288%, para as tensões médias de 0.5MPa, 1.5MPa, 2.0MPa, 2.5MPa e 3.0MPa, respetivamente.

A margem de segurança, quando a aplicação da força axial passa da zona do apoio começa a perder expressão, aproximando-se tendencialmente dos 5% a 8%, situação esta que simboliza a situação sem esforço axial nestas previsões.

A partir da tensão média de 2.0MPa, quando toda a contribuição do esforço axial é considerada deixa de haver trações na região da armadura inferior à face do apoio deixando de fazer sentido qualquer previsão de $F_{último}$.

Neste sentido, apesar da sua simplicidade, a fórmula de equilíbrio revela um comportamento muito positivo em relação à segurança.

3.5.2 Força pontual aplicada aproximadamente a h

Analisando a situação em que a força axial pontual se localiza na parte superior da viga, efetuaram-se as mesmas análises considerando que a resultante se encontra a cerca de $0.9h$, medido a partir da base da viga.

Como referido em 3.2.4, o valor de $A_{sbottle}$ para os modelos estudados nesta secção estão apresentados na Tabela 4.

A pormenorização em que a carga aplicada se encontra até $h/2$ do eixo do apoio e a pormenorização em que a carga aplicada se encontra a menos de $h/2$ do eixo do apoio são apresentadas em seguida, respetivamente, fig. 60 e fig. 61.

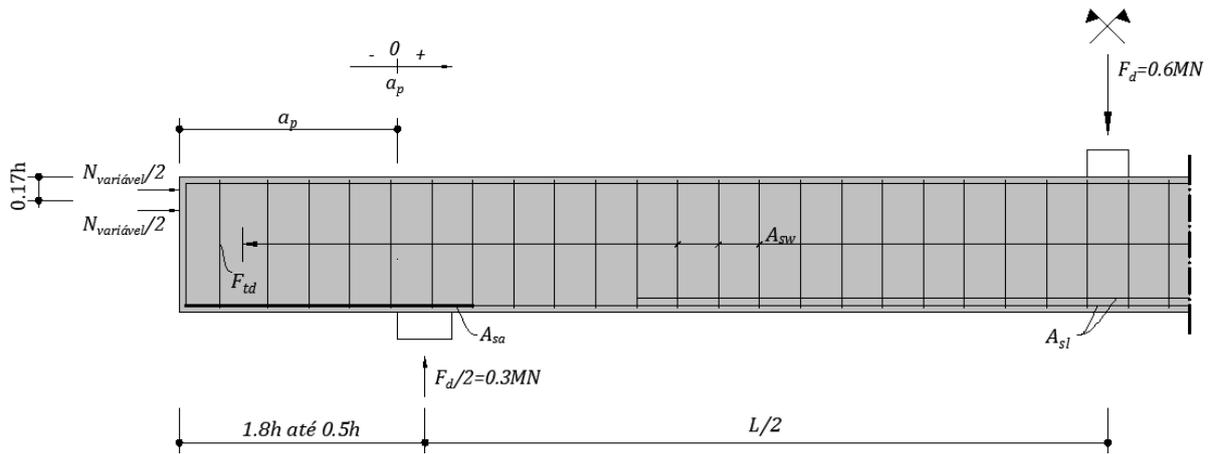


Figura 60 - Pormenorização da viga, $y=0.825h$, $a_p/h > h/2$ do eixo do apoio.

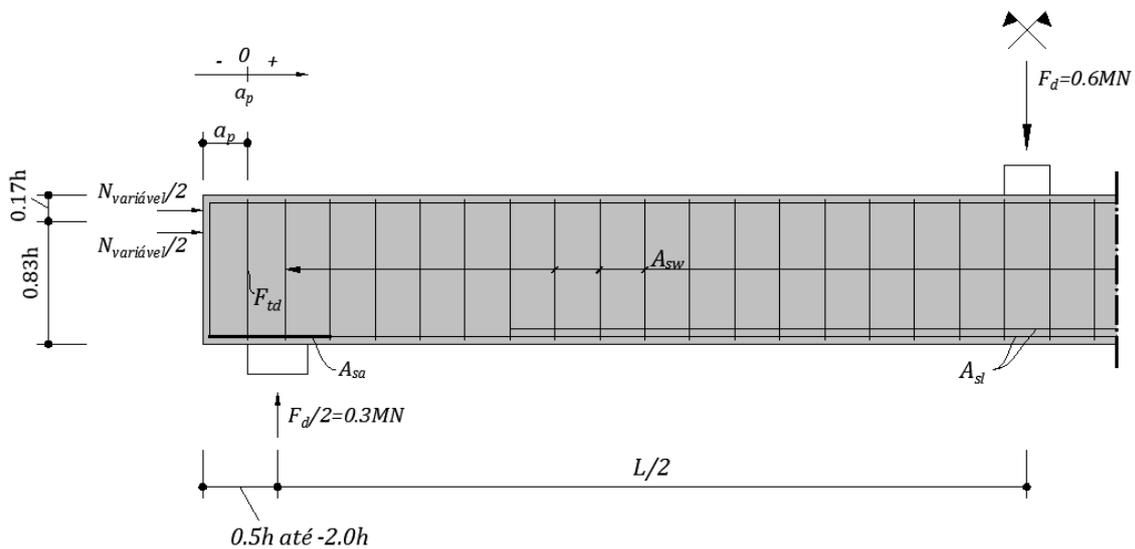


Figura 61 - Pormenorização da viga, $y=0.825h$, $a_p/h < h/2$ do eixo do apoio.

Em seguida na figura 62 é apresentada a quantificação da força T_a/T_{a0} , onde T_{a0} é a força obtida pela expressão de equilíbrio na situação em que não existe esforço axial, e T_a é a força obtida através do modelo que tem em conta o equilíbrio e a compatibilidade, com a tensão média de 1.5MPa. A armadura longitudinal inferior no apoio colocada foi calculada pelo modelo de equilíbrio para cada posição longitudinal da força horizontal.

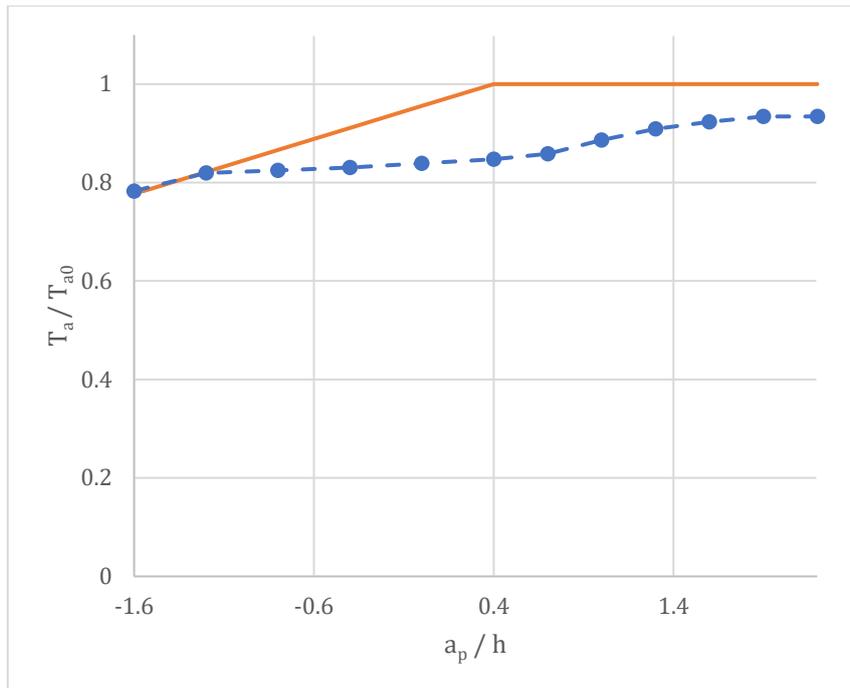


Figura 62 - Quantificação da força, $\sigma_{média}=1.5MPa, y=0.825h$.

O gráfico da figura 62 admite três trechos com comportamento distintos, mesmo que pouco evidenciados pela fraca contribuição do esforço axial para a força T_a :

- $a_p/h \leq -2z_p/h$;
- $-2z_p/h < a_p/h < 1.9$;
- $a_p/h \geq 1.9$.

em que,

$$z_p = 0.825 - 0.05 \rightarrow \frac{2z_p}{h} = 1.55$$

Quando a força concentrada está aplicada a uma distância superior a $2z_p$ da face externa do apoio, a força T_a é semelhante às análises feitas anteriormente, admitindo um esforço axial uniforme na face da viga.

A compressão dada pela força concentrada deixa de ter contribuição quando aplicado a uma distância superior a $a_p/h=1.9$ da face exterior do apoio, ou seja, caímos na situação do capítulo 3.3. A diferença no gráfico a partir de 1.9 entre o *modelo de equilíbrio* e o *modelo de equilíbrio + compatibilidade*, surge devido ao detalhe da armadura transversal ser superior à necessária quando não há interferência do esforço axial.

Para a situação da força horizontal aplicada a $-2z_p/h < a_p/h < 1.9$, existe uma pequena diferença entre os dois modelos.

Para melhor compreensão dos resultados, em seguida apresentam-se os campos de tensões e o “utilization ratio” das armaduras na região do apoio para a carga de dimensionamento, de um ponto de cada intervalo da figura 62. Em anexo encontram-se os campos de tensões e o “utilization ratio” das armaduras até ao meio vão. Os pontos escolhidos de cada intervalo foram:

- $a_p/h \leq -2z_p/h \rightarrow a_p/h = -1.6$, fig. 63 e fig. 66;
- $-2z_p/h < a_p/h < 1.6 \rightarrow a_p/h = 0.4$, fig. 64 e fig. 67;
- $a_p/h \geq 1.6 \rightarrow a_p/h = 2.2$, fig. 65 e fig. 68.

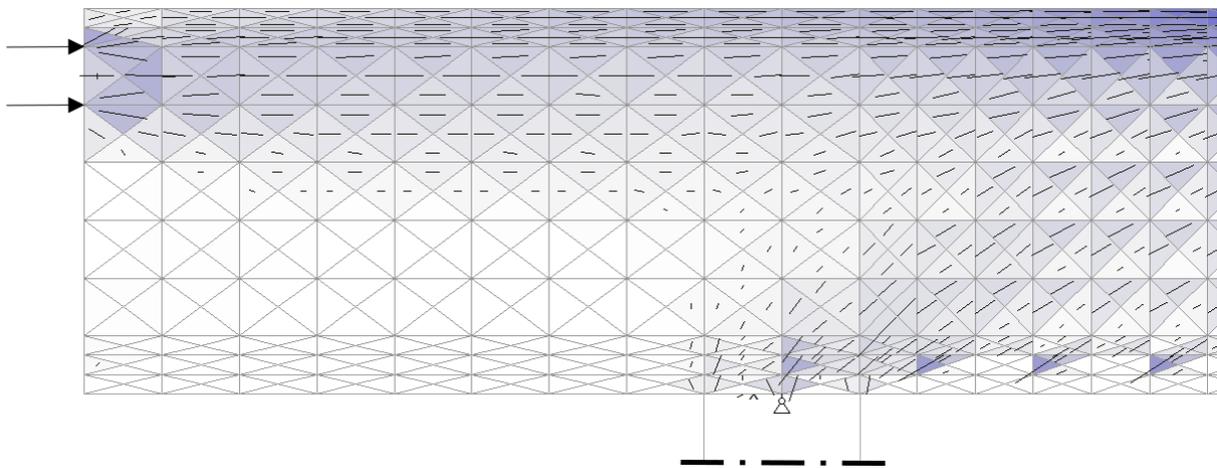


Figura 63 - Campo de tensões, $\sigma_{média}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $a_p/h=-1.6$.

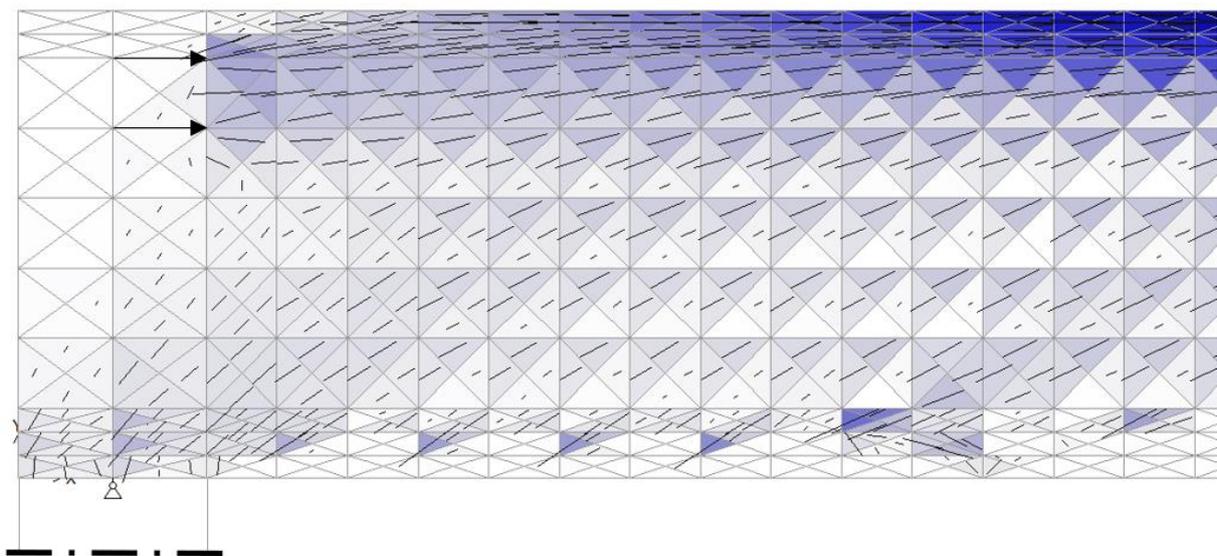


Figura 64 - Campo de tensões, $\sigma_{média}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $a_p/h=0.4$.

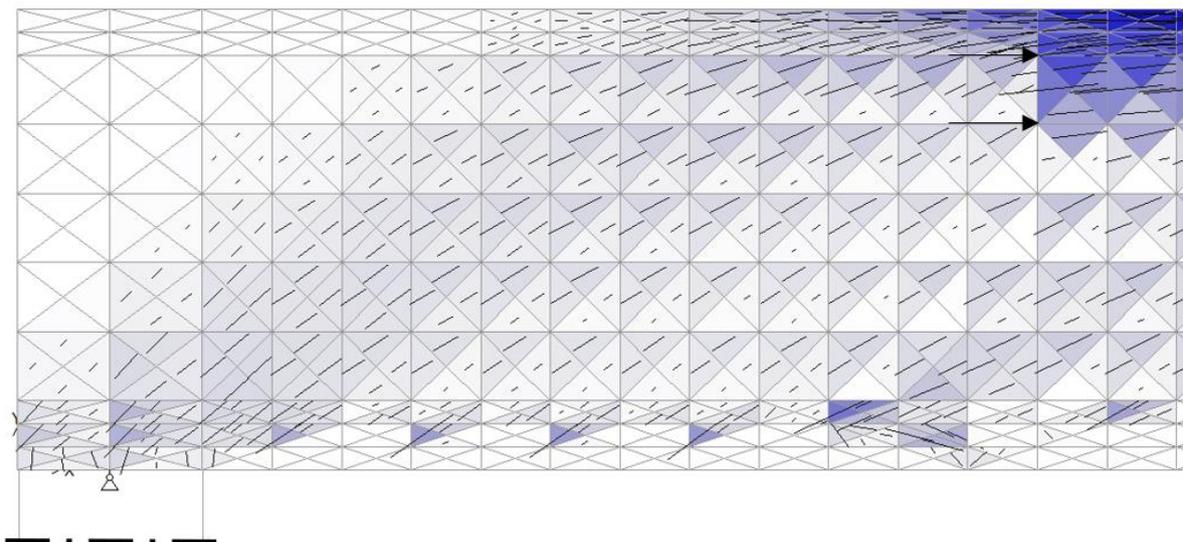


Figura 65 - Campo de tensões, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5MPa$, $y=0.825h$, $a_p/h=2.2$.

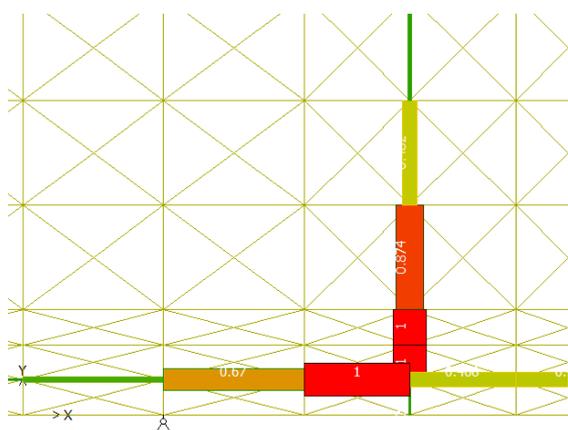


Figura 66 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5MPa$, $y=0.825h$, $a_p/h=-1.6$.

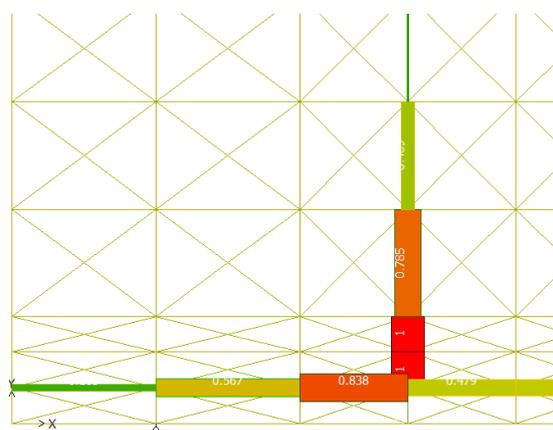


Figura 67 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5MPa$, $y=0.825h$, $a_p/h=0.4$.

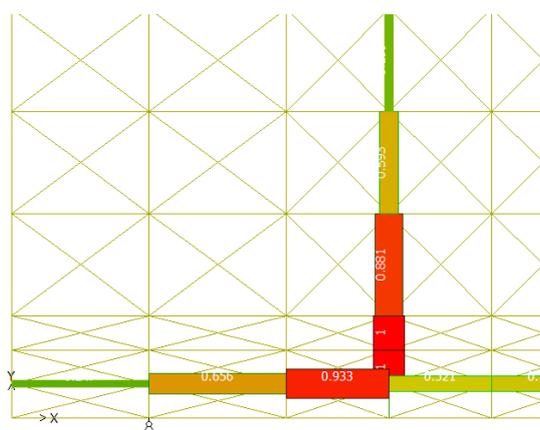


Figura 68 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5MPa$, $y=0.825h$, $a_p/h=2.2$.

Em seguida apresentam-se os gráficos da quantificaao da força T_a/T_{a0} com vários níveis de tensão média, resultantes da análise do modelo que tem em conta o equilíbrio e a compatibilidade.

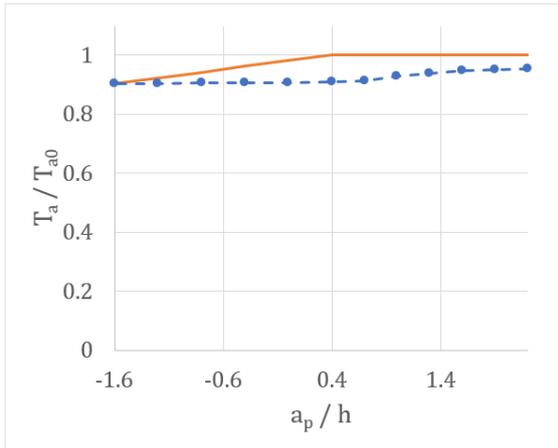


Figura 69 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=0.5\text{MPa}$, $y=0.825h$.

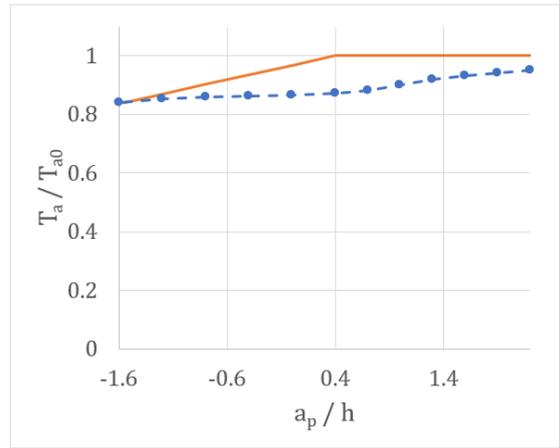


Figura 70 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.0\text{MPa}$, $y=0.825h$.

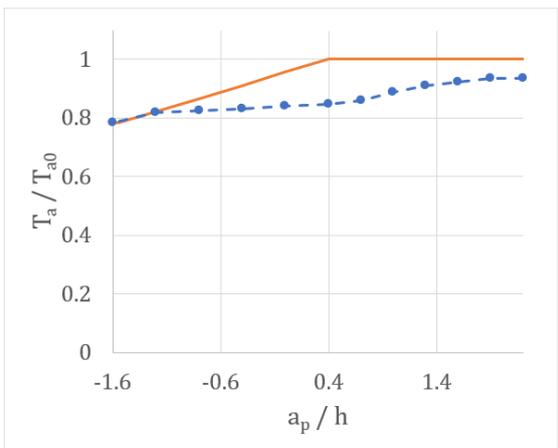


Figura 71 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$.

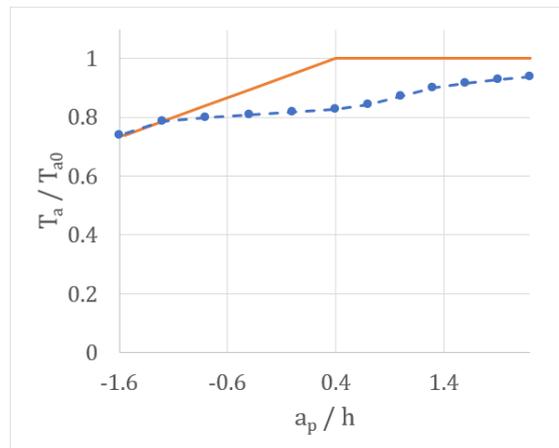


Figura 72 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=2.0\text{MPa}$, $y=0.825h$.

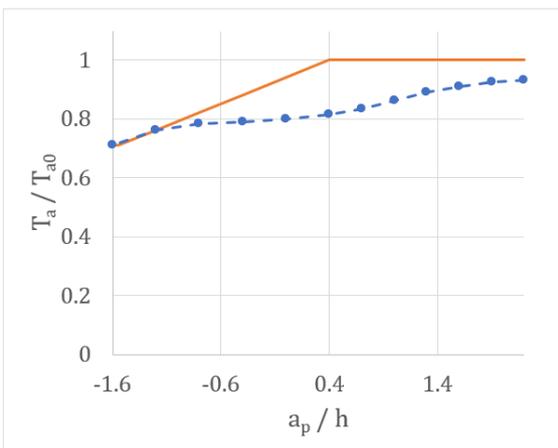


Figura 73 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=2.5\text{MPa}$, $y=0.825h$.

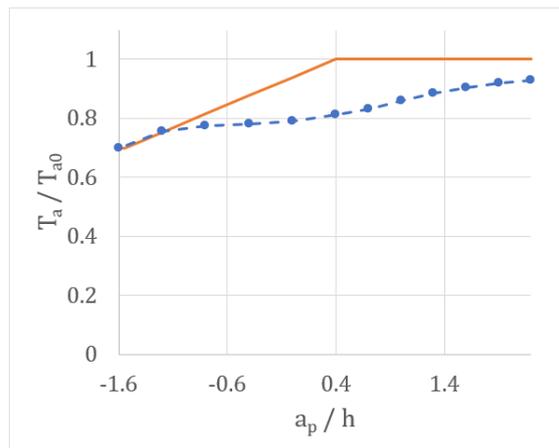


Figura 74 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=3.0\text{MPa}$, $y=0.825h$.

— Modelo de equilíbrio
 - ● - Modelo de equilíbrio + compatibilidade

Os intervalos referidos anteriormente para a tensão média de 1.5MPa quase não existem quando a viga está sujeita à tensão média de 0.5MPa. Neste patamar de tensão média a contribuição da força praticamente não sofre alteração qualquer que seja a_p/h . Os intervalos vão se evidenciando à medida que a tensão média aumenta.

Os gráficos das figuras 69-74 mostram que os modelos das análises fisicamente não lineares têm uma tendência qualitativamente semelhante ao obtido pela fórmula de equilíbrio. Em distâncias do ponto de aplicação superior a $2z_p$ da face externa do apoio os dois modelos coincidem nos resultados obtidos. Os resultados dos modelos da análise fisicamente não linear seguem a tendência de crescimento na mesma zona que a contribuição linear do esforço axial na fórmula de equilíbrio, apesar de terem uma expressão mais contida, a tendência é que enquanto o ponto de aplicação se afasta da face interna do apoio da viga, estes resultados convirjam para 4 situação sem esforço axial.

Quando se considera toda a contribuição do esforço axial, i.e. está aplicada a uma distância superior a $2z_p$ da face externa do apoio e tensão média de 0.5MPa, existe uma contribuição de 10% em relação à situação sem esforço axial. Quanto maior é a tensão média mais elevada é esta contribuição, tomando os valores 16%, 22%, 27%, 29% e 30% para tensão média de 1.0MPa, 1.5MPa, 2.0MPa, 2.5MPa e 3.0MPa, respetivamente.

Uma vez mais se constata pelas figuras 67 e 68, apresentadas anteriormente, que as armaduras não estão em cedência, o que dá aso a alguma folga entre a carga de dimensionamento, F_d , e a carga última, $F_{último}$, correspondente à rotura por plastificação da armadura inferior do apoio. No entanto, a figura 66 mobiliza toda a sua capacidade resistente, o que não quer dizer que esteja obrigatoriamente no limite da sua capacidade.

Em seguida apresentam-se os gráficos com a aplicação da equação (2.27) para os vários níveis de tensão média estudados, permitindo realizar a previsão da carga última para o modo de rotura por plastificação da armadura longitudinal inferior no apoio.

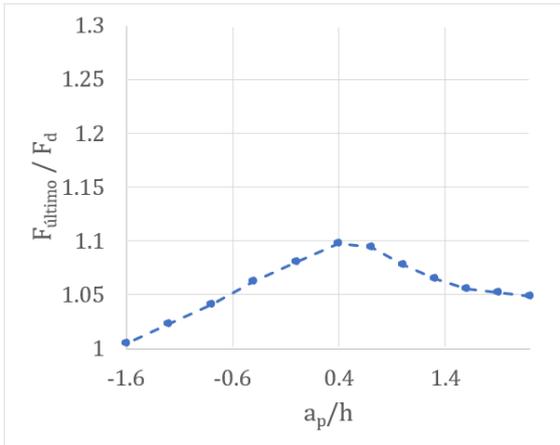


Figura 75 – $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=0.5\text{MPa}$, $y=0.825h$.

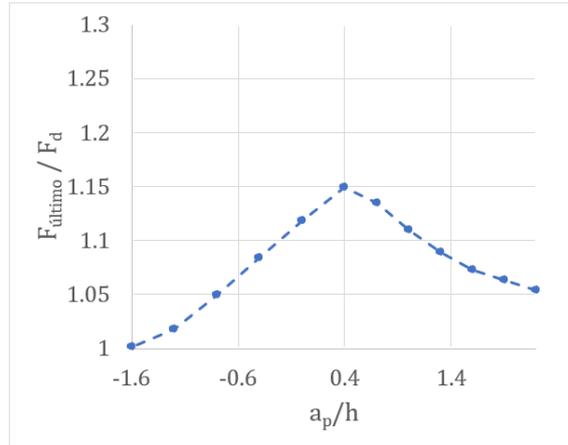


Figura 76 – $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=1.0\text{MPa}$, $y=0.825h$.

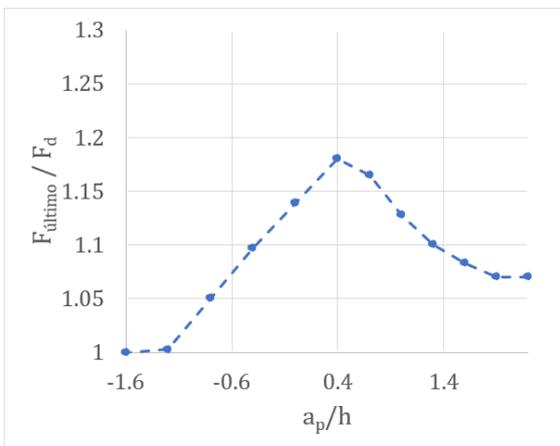


Figura 77 – $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$.

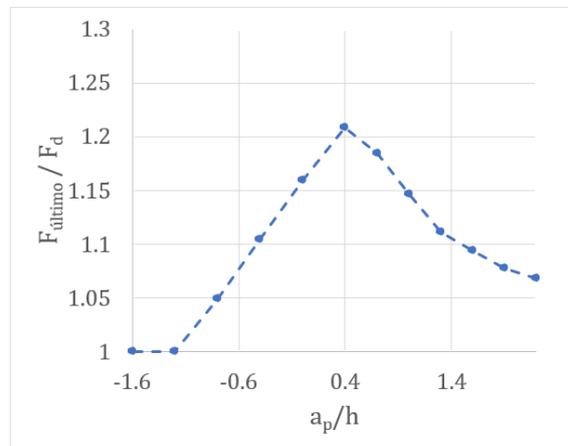


Figura 78 – $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=2.0\text{MPa}$, $y=0.825h$.

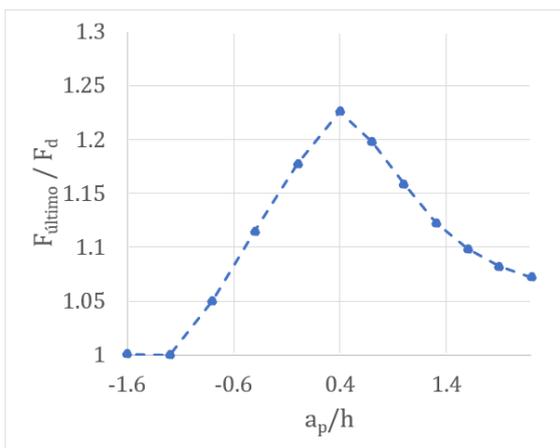


Figura 79 – $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=2.5\text{MPa}$, $y=0.825h$.

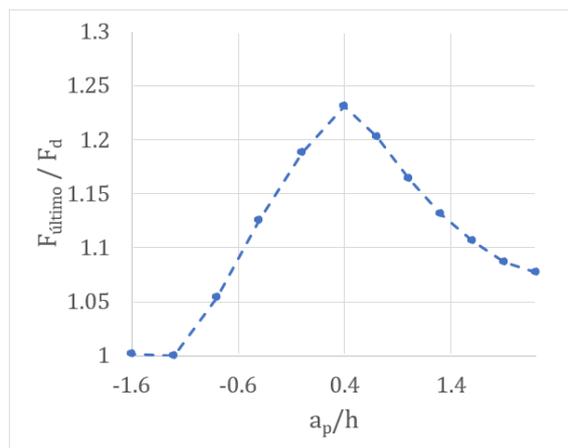


Figura 80 – $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.825h$.

—●— Modelo de equilíbrio + compatibilidade

Quando a aplicação do esforço axial se encontra a uma distância superior a $2z_p$ da face do apoio, neste caso a aproximadamente $a_p/h=1.55$, a carga última estimada não tem margem de segurança. Salienta-se, uma vez mais, que embora carga última estimada, obtida pelo método da fórmula (2.27), seja a carga de dimensionamento, existe uma margem latente de segurança conferida pela alteração de inclinação das compressões que chegam ao apoio que não são consideradas pela estimativa da fórmula.

Quando a aplicação da força axial se aproxima da região do apoio, existe um aumento linear desta margem, que atinge o seu pico na face interna do apoio, acentuando-se ainda mais nas tensões médias mais elevadas. Os valores dos picos da margem de segurança são 10%, 15%, 18%, 21%, 23%, 23%, para as tensões médias de 0.5MPa, 1.5MPa, 2.0MPa, 2.5MPa e 3.0MPa, respetivamente.

A margem de segurança, quando a aplicação da força axial passa da zona do apoio começa a perder expressão, aproximando-se tendencialmente dos 5% a 8%, situação esta que simboliza a situação sem esforço axial nestas previsões.

Novamente a fórmula de equilíbrio revela um comportamento adequado em relação à segurança.

3.5.3 Força pontual aplicada aproximadamente a $y=0$

Analisando a situação em que a força axial pontual se localiza na parte inferior da viga, efetuaram-se as mesmas análises considerando que a resultante se encontra a cerca de $0.1h$, medido a partir da base da viga.

Como referido em 3.2.4, o valor de $A_{sbottle}$ para os modelos estudados nesta secção estão apresentados na Tabela 5.

A pormenorização em que a carga aplicada se encontra até $h/2$ do eixo do apoio e a pormenorização em que a carga aplicada se encontra a menos de $h/2$ do eixo do apoio são apresentadas em seguida, respetivamente, fig. 81 e fig. 82.

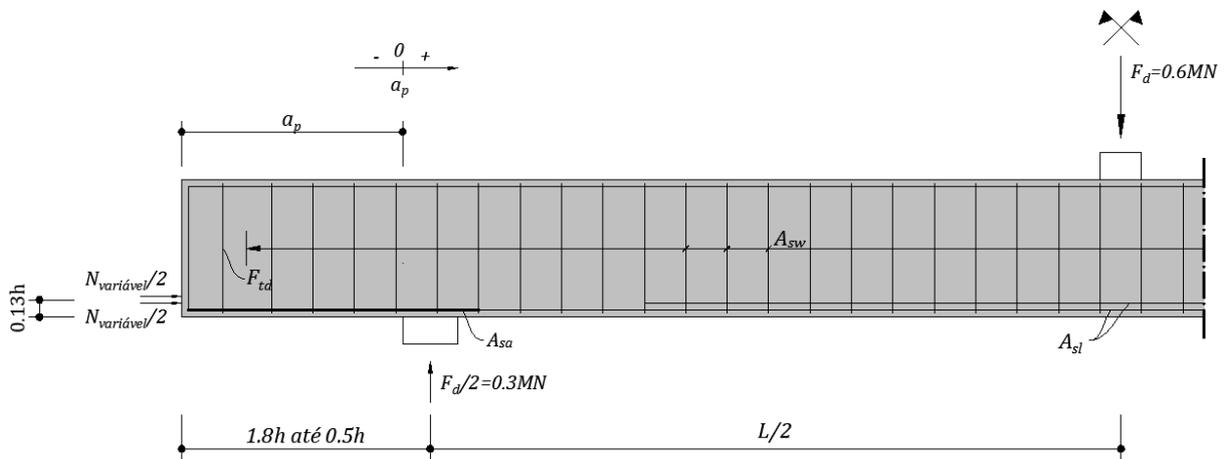


Figura 81 - Pormenorização da viga, $y=0.125h$, $a_p/h > h/2$ do eixo do apoio.

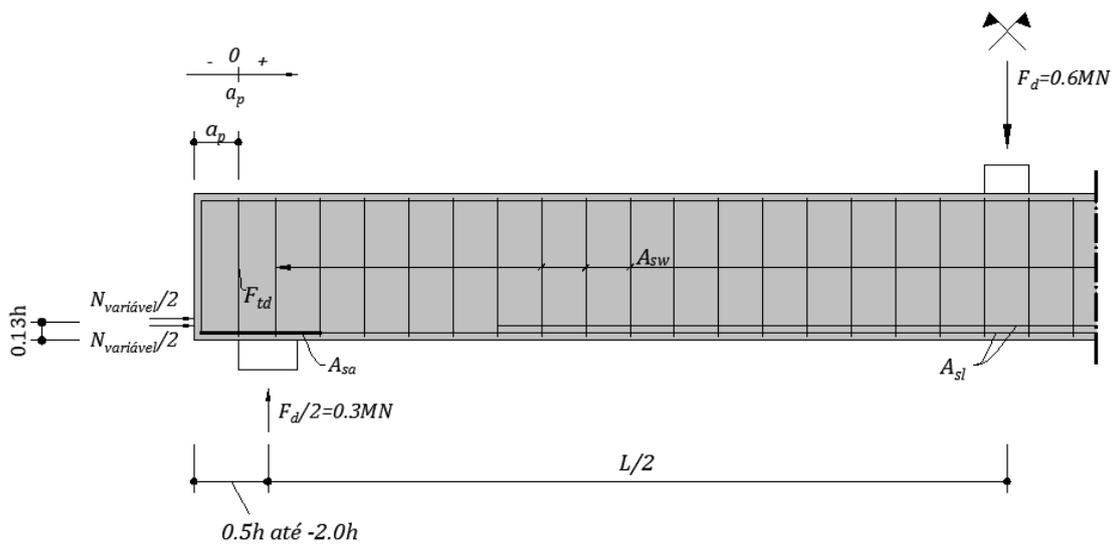


Figura 82 - Pormenorização da viga, $y=0.125h$, $a_p/h < h/2$ do eixo do apoio.

Em seguida na figura 83 é apresentada a quantificação da força T_a/T_{a0} , onde T_{a0} é a força obtida pela expressão de equilíbrio na situação em que não existe esforço axial, e T_a é a força obtida através do modelo que tem em conta o equilíbrio e a compatibilidade, com a tensão média de 1.5MPa. A armadura longitudinal inferior no apoio colocada foi calculada pelo modelo de equilíbrio para cada posição longitudinal da força horizontal.

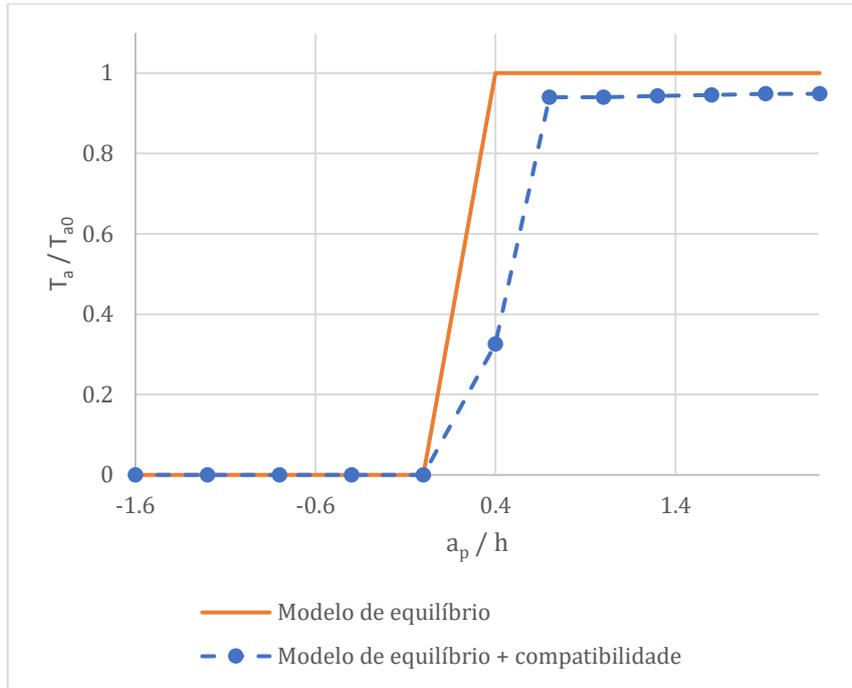


Figura 83 - Quantificação da força, $\sigma_{média}=1.5MPa, y=0.125h$.

O gráfico da figura 83 admite três trechos com comportamento distintos:

- $a_p/h \leq -2z_p/h$;
- $-2z_p/h < a_p/h < 0.7$;
- $a_p/h \geq 0.7$.

em que,

$$z_p = 0.075 \rightarrow \frac{2z_p}{h} = 0.075$$

Quando a força concentrada está aplicada a uma distância superior a $2z_p$ da face externa do apoio, a força T_a é semelhante às análises feitas anteriormente, admitindo um esforço axial uniforme na face da viga.

A compressão dada pela força concentrada deixa de ter contribuição quando aplicado a uma distância igual ou superior a $a_p/h=0.7$ da face exterior do apoio, ou seja, caímos na situação da secção 3.3.

Para a situação da força horizontal aplicada a $-2z_p/h < a_p/h < 0.7$, quase não existe diferença entre os dois modelos.

Para este caso a fórmula de equilíbrio retrata com exatidão o obtido pelas análises não lineares.

Para melhor compreensão dos resultados, em seguida apresentam-se os campos de tensões e o “utilization ratio” das armaduras na região do apoio para a carga de dimensionamento, de um ponto de cada intervalo da figura 83. Em anexo encontram-se os campos de tensões e o “utilization ratio” das armaduras até ao meio vão. Os pontos escolhidos de cada intervalo foram:

- $a_p/h \leq -2z_p/h \rightarrow a_p/h = -1.6$, fig. 84 e fig. 87;
- $-2z_p/h < a_p/h < 1.6 \rightarrow a_p/h = 0.4$, fig. 85 e fig. 88;
- $a_p/h \geq 1.6 \rightarrow a_p/h = 1.0$, fig. 86 e fig. 89.

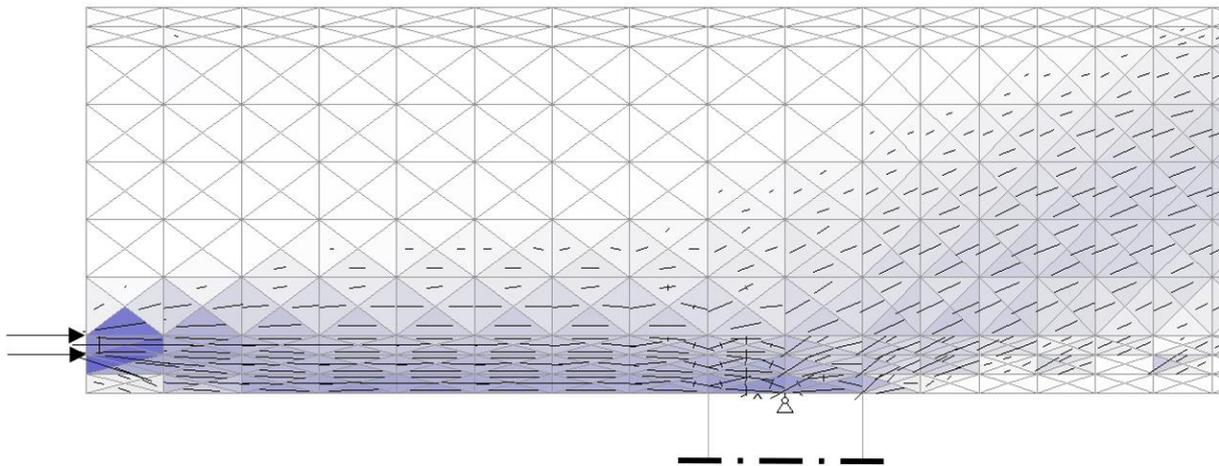


Figura 84 - Campo de tensões, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $a_p/h=-1.6$.

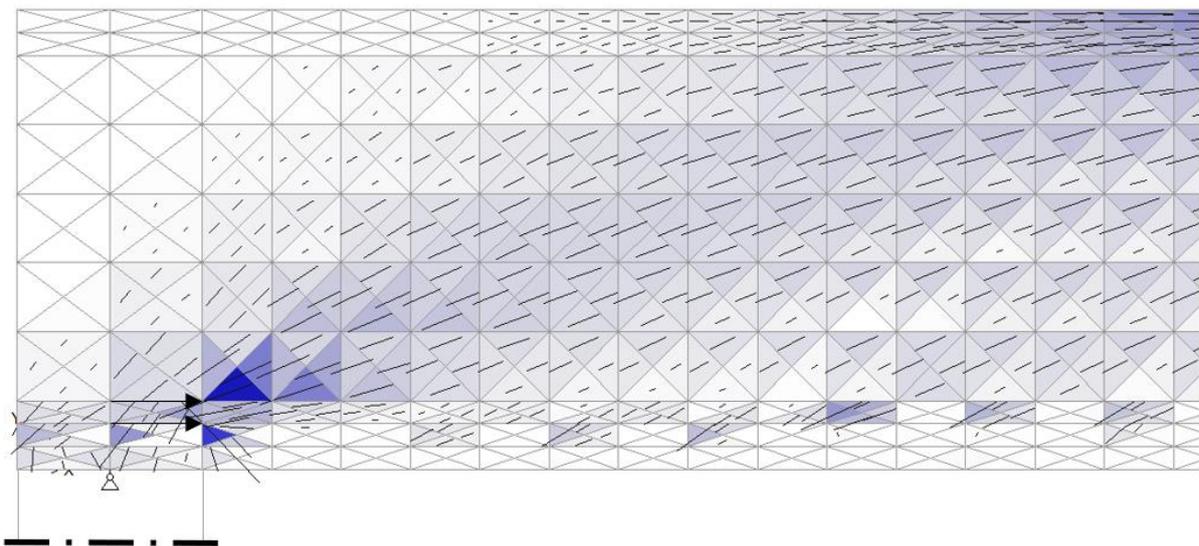


Figura 85 - Campo de tensões, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $a_p/h=0.4$.

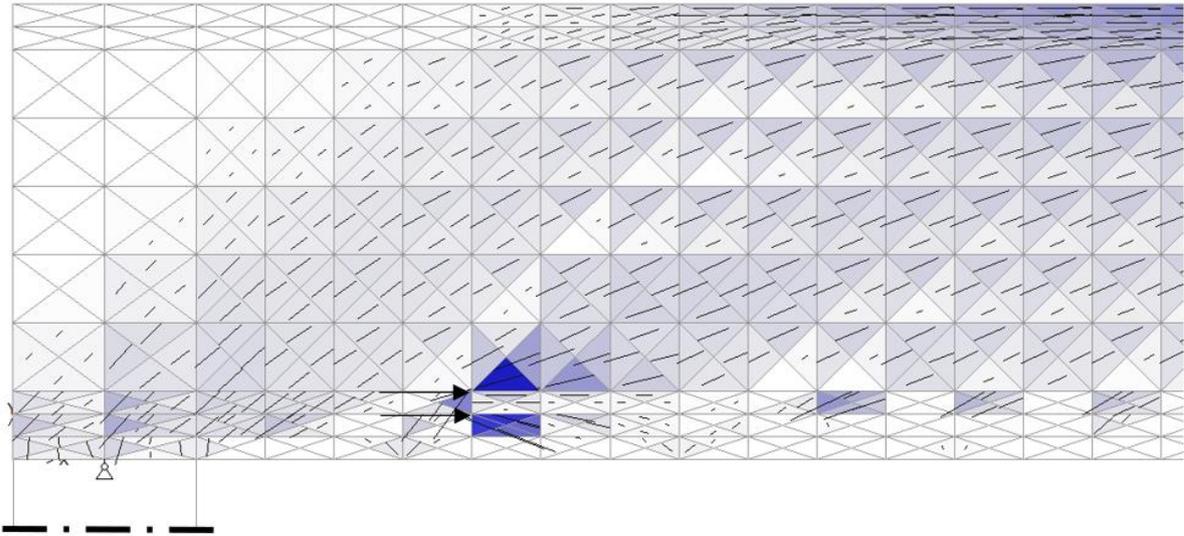


Figura 86 - Campo de tensões, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5MPa$, $y=0.125h$, $a_p/h=1.0$.

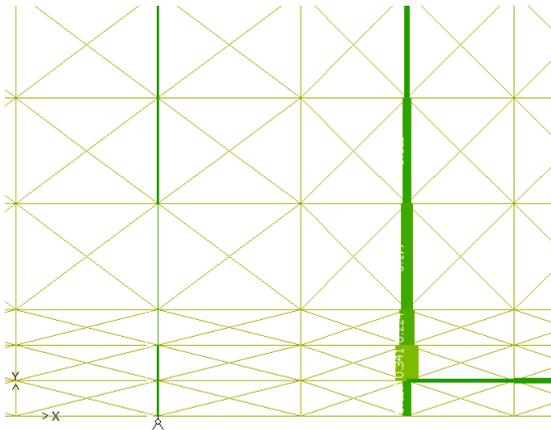


Figura 87 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5MPa$, $y=0.125h$, $a_p/h=-1.6$.

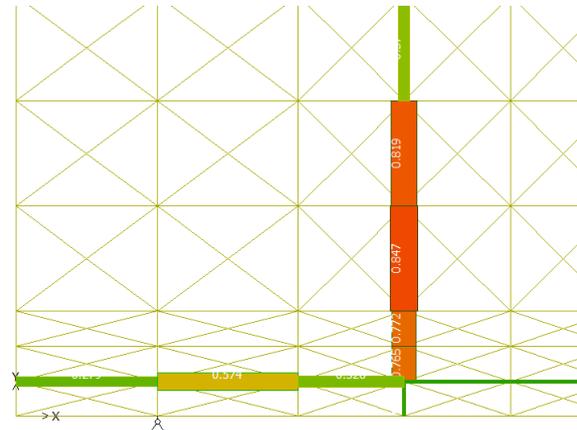


Figura 88 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5MPa$, $y=0.125h$, $a_p/h=0.4$.

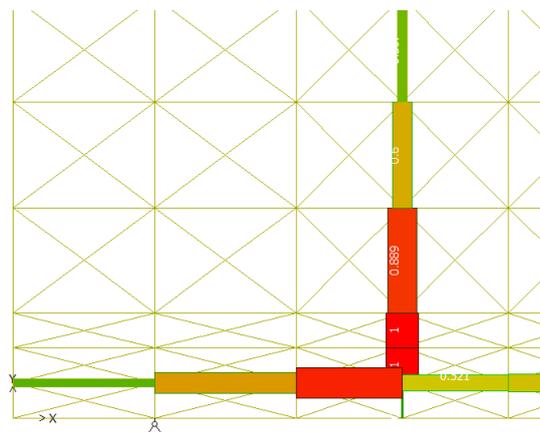


Figura 89 - "utilization ratio" das armaduras, $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5MPa$, $y=0.125h$, $a_p/h=1.0$.

Em seguida apresentam-se os gráficos da quantificaao da força T_a/T_{a0} com vários níveis de tensão média, resultantes da análise do modelo que tem em conta o equilíbrio e a compatibilidade.

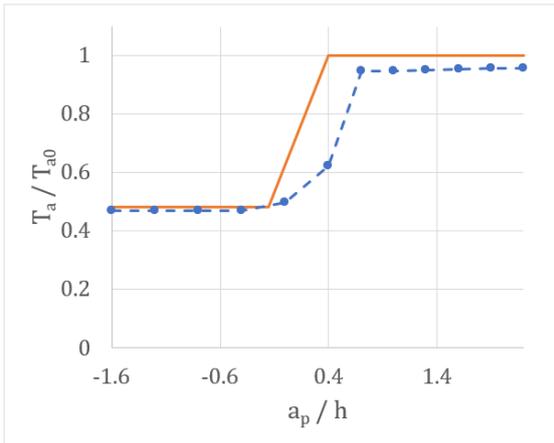


Figura 90 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=0.5\text{MPa}$, $y=0.125h$.

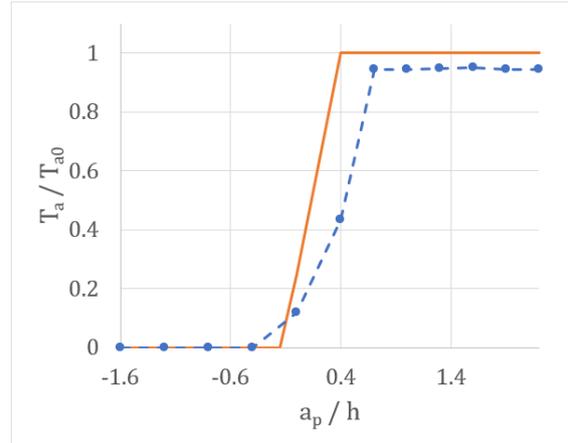


Figura 91 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=1.0\text{MPa}$, $y=0.125h$.

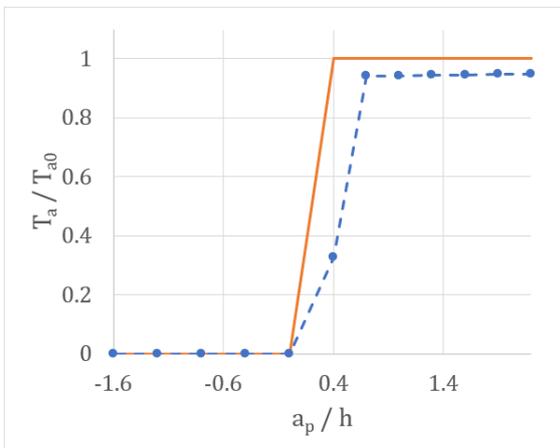


Figura 92 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$.

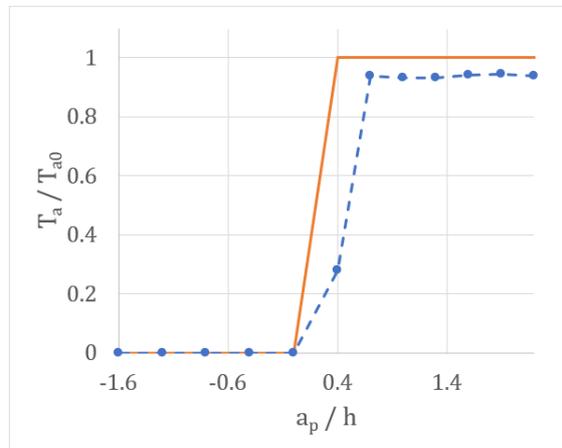


Figura 93 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=2.0\text{MPa}$, $y=0.125h$.

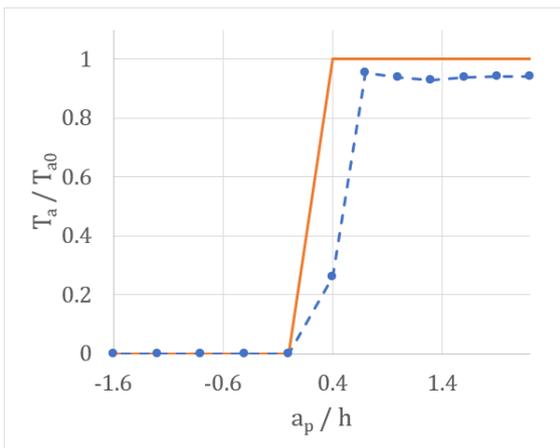


Figura 94 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=2.5\text{MPa}$, $y=0.125h$.

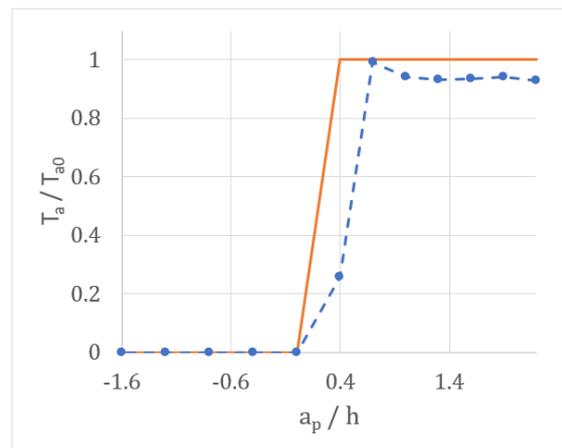


Figura 95 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{média}=3.0\text{MPa}$, $y=0.125h$.

— Modelo de equilíbrio
 - ● - Modelo de equilíbrio + compatibilidade

As figuras 90-95 mostram que quando a força horizontal se encontra aplicada antes da região onde é definida a força T_a , toda a contribuição é considerada, já no sentido inverso, quando passa a região onde é definida a força T_a , esta contribuição é nula.

Quando toda a contribuição é considerada, apenas para a tensão média=0.5MPa é que há trações na armadura inferior do apoio, 48% da força T_a relativamente ao caso sem esforço axial. Em níveis de tensão mais elevados a região passa a estar comprimida. As figuras 90-95 demonstram que quando, por exemplo, uma placa de ancoragem de pré-esforço está posicionada numa zona mais próxima da base da viga, mais eficiente o esforço axial se torna.

Para este caso a fórmula de equilíbrio retrata com exatidão o obtido pelas análises não lineares.

Em seguida apresentam-se as figuras com os gráficos com a aplicação da expressão (2.27) para os vários níveis de tensão média estudados, permitindo realizar a previsão da carga última para o modo de rotura por plastificação da armadura longitudinal inferior no apoio, figuras 96-101.

Conforme observado nas figuras da quantificação da força, somente para o caso da tensão média=0.5MPa é que existe trações à face do apoio para toda a contribuição do esforço axial, por conseguinte para tensões médias superiores não existe previsão da carga de rotura nessa divisão.

O pico da margem de segurança acontece quando $a_p/h=0.4$, i.e. está aplicado verticalmente na face interna do apoio. Os valores desta margem vão aumentando à medida que a tensão média também aumenta, tomando os valores de 60%, 130%, 207%, 258%, 283%, 288%, para as tensões médias de 0,5MPa, 1,0MPa, 1,5MPa, 2,0MPa, 2,5MPa e 3.0MPa, respetivamente.

Ao transpor $a_p/h=0.4$ a margem de segurança cai para os valores habituais do caso sem esforço axial.

Para este caso a fórmula de equilíbrio retrata com exatidão o obtido pelas análises não lineares.

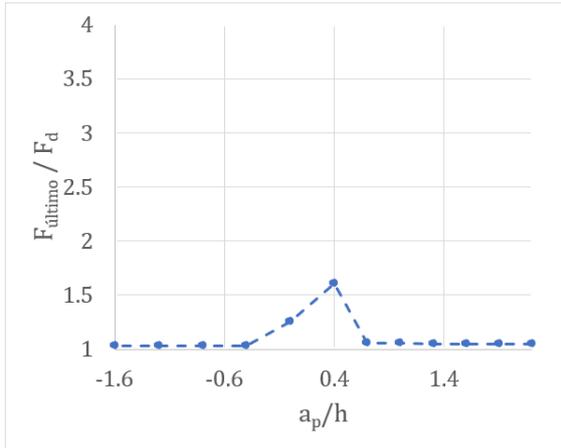


Figura 96 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=0.5\text{MPa}$, $y=0.125h$.

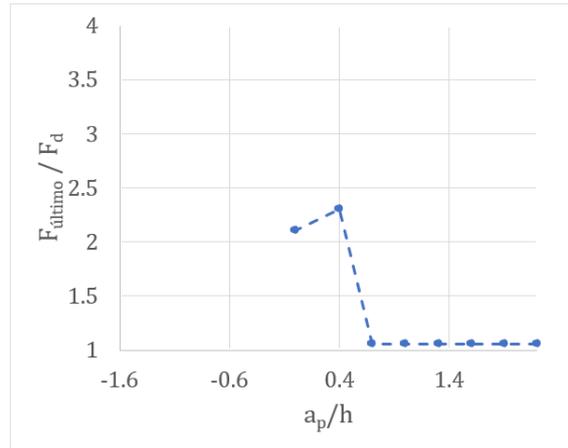


Figura 97 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=1.0\text{MPa}$, $y=0.125h$.

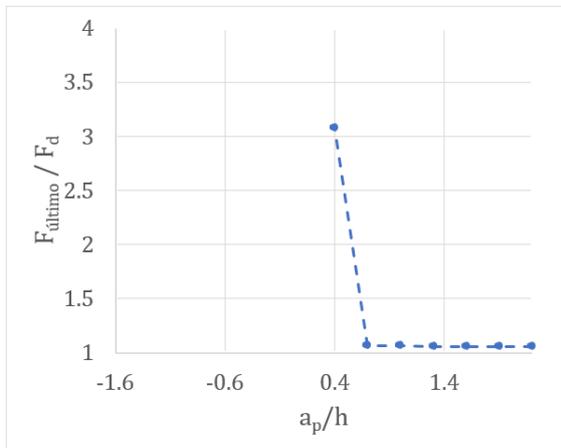


Figura 98 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$.

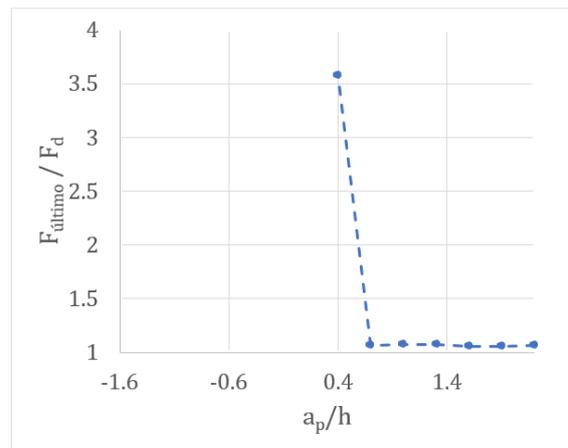


Figura 99 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=2.0\text{MPa}$, $y=0.125h$.

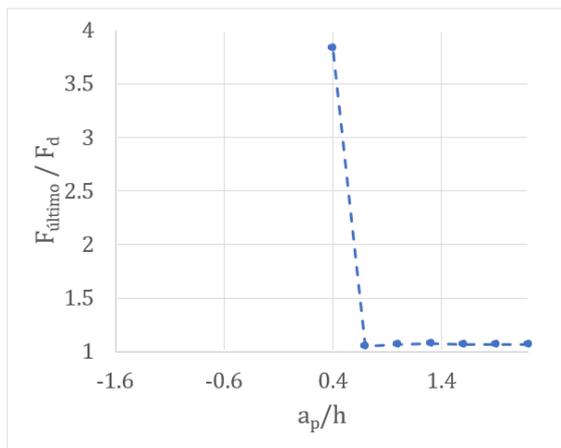


Figura 100 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=2.5\text{MPa}$, $y=0.125h$.

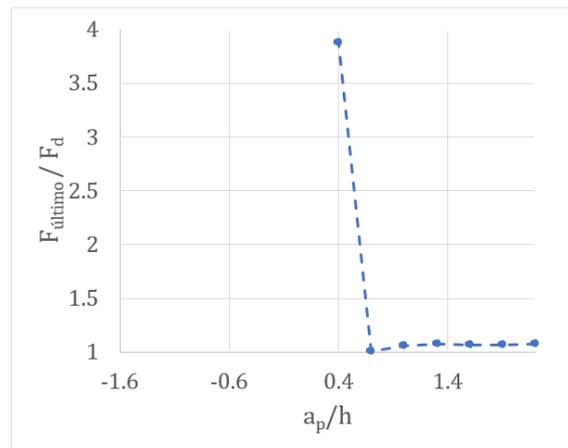


Figura 101 - $F_{\text{último}}/F_d$, $\sigma_{\text{média}}=3.0\text{MPa}$, $y=0.125h$.

—●— Modelo de equilíbrio + compatibilidade

3.6 Sugestão de um novo limite para a contribuição de esforço axial não uniforme

A aplicação do esforço axial permite diminuir a força de tração da armadura longitudinal inferior no apoio através de dois efeitos. O primeiro efeito e mais intuitivo trata-se de haver uma maior compressão na secção, o que faz diminuir a força T_a , contudo, a aplicação do esforço axial no trecho intermédio, identificado nos gráficos aquando da quantificação da força T_a , permite alterar a inclinação das compressões que chegam ao apoio.

A figura 102 ilustra o campo de tensões da viga quando esta está sujeita ao efeito do esforço axial aplicado no alinhamento vertical da face interna do apoio. A figura 103 ilustra o campo de tensões quando o esforço axial está aplicado a uma distância elevada do apoio.

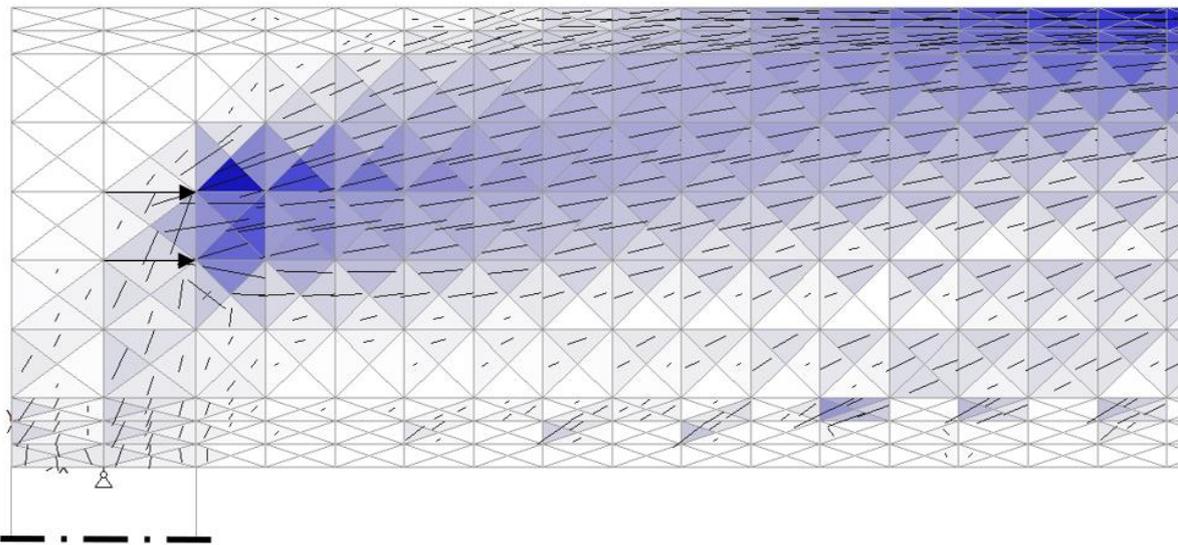


Figura 102 - Campo de tensões da viga, $\sigma_{média}=3.0\text{MPa}$, $y=0.525h$, $a_p/h=0.4$.

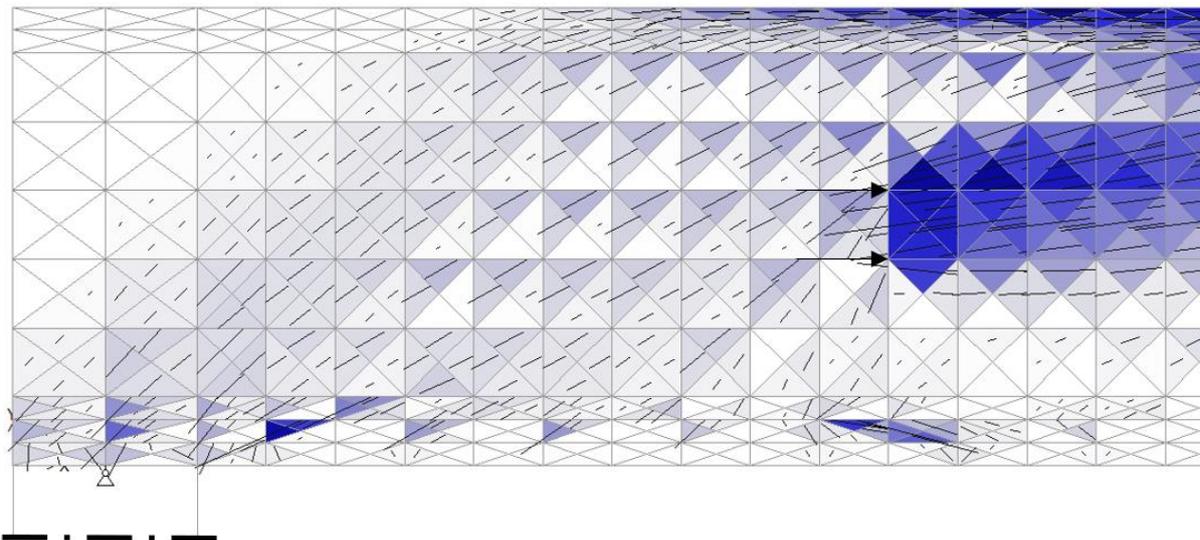


Figura 103 - Campo de tensões da viga, $\sigma_{média}=3.0\text{MPa}$, $y=0.525h$, $a_p/h=1.9$.

Como se observa, na primeira figura o efeito do esforço axial permite uma mudança de inclinações para o apoio, já na segunda figura, devido à elevada distância do esforço axial em relação ao apoio, embora as inclinações alterem, as compressões têm de ser novamente suspensas pelos estribos, seguindo o mecanismo convencional associado ao esforço transverso.

O limite para esta mudança de inclinações ser favorável situa-se no limite do leque de compressões, visto que dentro do leque de compressões a carga pode ir diretamente para o apoio e passando deste limite toda a carga tem de voltar a ser suspensa, tomando o mecanismo convencional de esforço transverso.

Apesar dos resultados da fórmula de equilíbrio proposta garantirem a segurança e serem de simples aplicação, sugere-se que o limite interno para o cálculo de N_d seja o limite do campo de compressões em leque como apresentado na figura 104, e que o cálculo de N_d da eq. (2.27) tome a seguinte expressão:

$$N_d = P_\infty \cdot \cos \alpha \cdot \left(\frac{a_p + (z_p + c) \cdot \cot \theta + a}{2z_p + (z_p + c) \cdot \cot \theta + a} \right) \quad (2.27)$$

com,

$$-((z_p + c) \cdot \cot \theta + a) \leq a_p \leq 2z_p$$

A sugestão será apenas de utilidade se for considerada em situações em que a aplicação, por exemplo de uma placa de ancoragem, se encontra para a parte interna da viga, situação não usual, somado com problemas de amarração das armaduras.

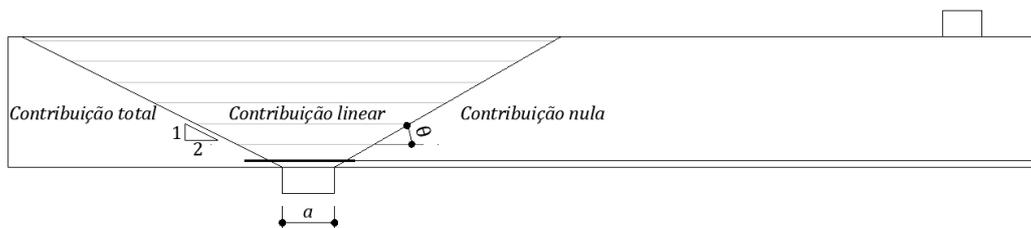


Figura 104 - Sugestão de novos limites da contribuição do esforço axial.

A proposta efetuada é comparada com os gráficos apresentados anteriormente na secção “Segurança da região do apoio com distribuição de esforço axial não uniforme” nas figuras 105 - 122. Ao sobrepor os gráficos obtidos da força T_a tendo em conta que os pontos a baixo da linha que corresponde à alteração proposta estão verificados à partida e os pontos a cima são verificados através do cálculo de análises fisicamente não lineares quando colocada a armadura à face do apoio correspondente à alteração proposta.

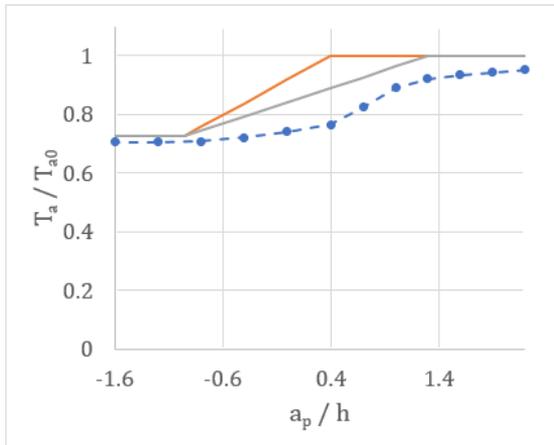


Figura 105 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=0.5MPa$, $y=0.525h$.

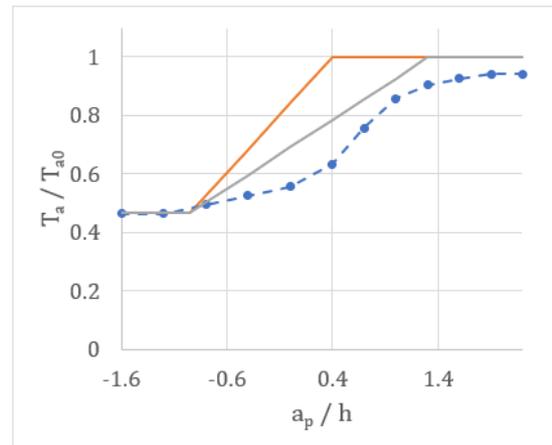


Figura 106 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.0MPa$, $y=0.525h$.

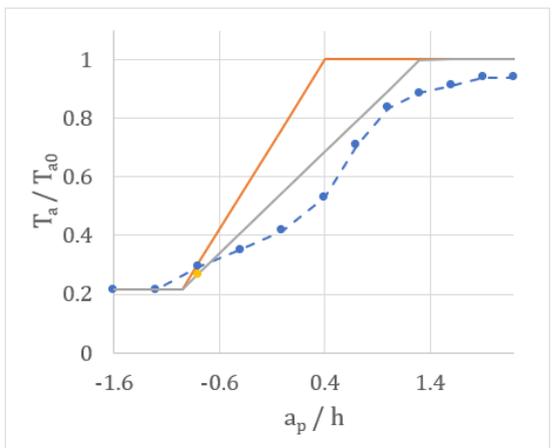


Figura 107 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5MPa$, $y=0.525h$.

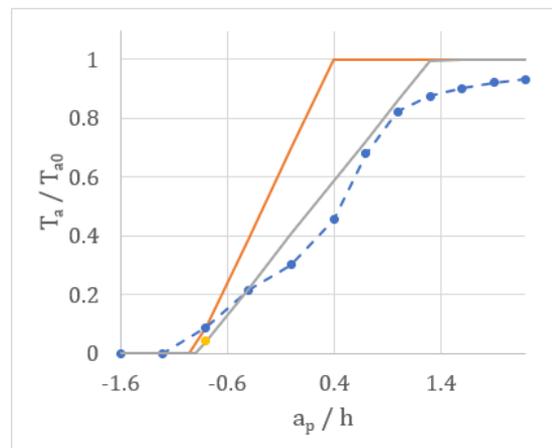


Figura 108 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=2.0MPa$, $y=0.525h$.

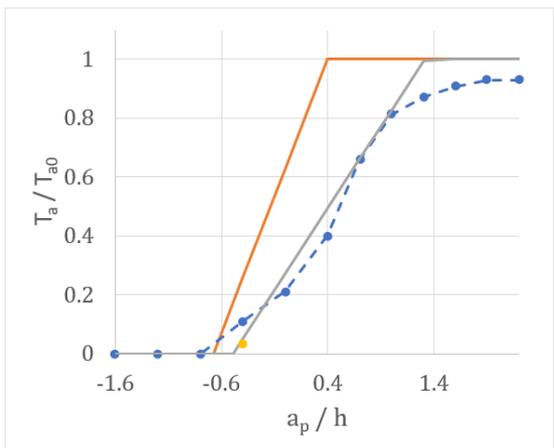


Figura 109 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=2.5MPa$, $y=0.525h$.

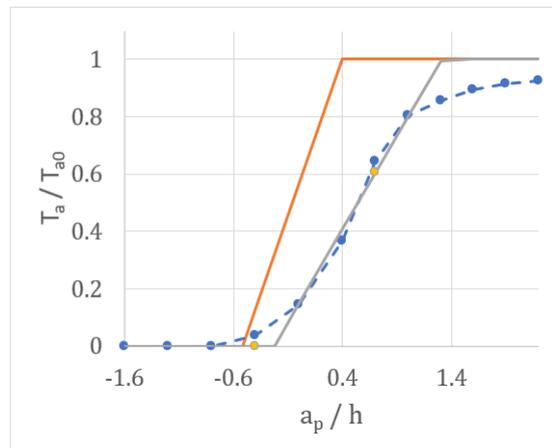


Figura 110 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=3.0MPa$, $y=0.525h$.

- Modelo de equilíbrio
- Modelo de equilíbrio + compatibilidade
- Alteração proposta
- Modelo de equilíbrio + compatibilidade com a armadura proposta

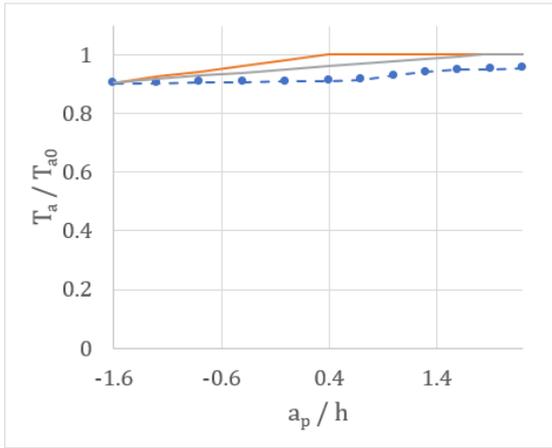


Figura 111 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\u00e9dia}=0.5MPa$, $y=0.825h$.

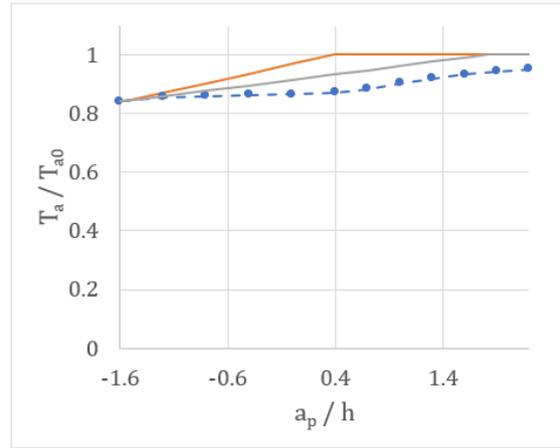


Figura 112 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\u00e9dia}=1.0MPa$, $y=0.825h$.

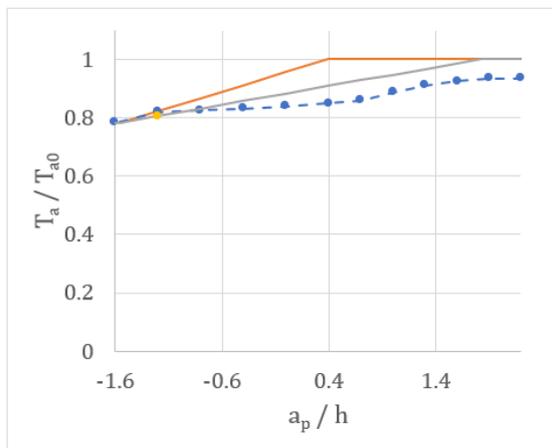


Figura 113 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\u00e9dia}=1.5MPa$, $y=0.825h$.

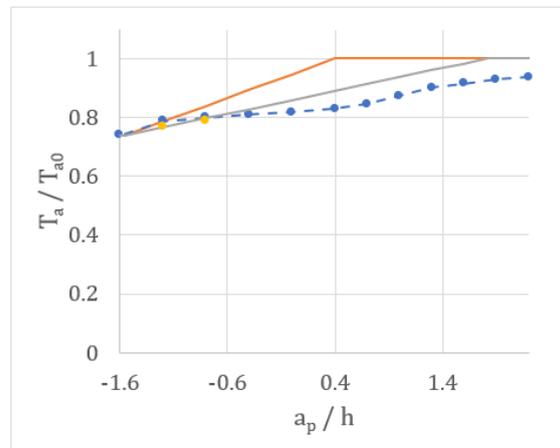


Figura 114 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\u00e9dia}=2.0MPa$, $y=0.825h$.

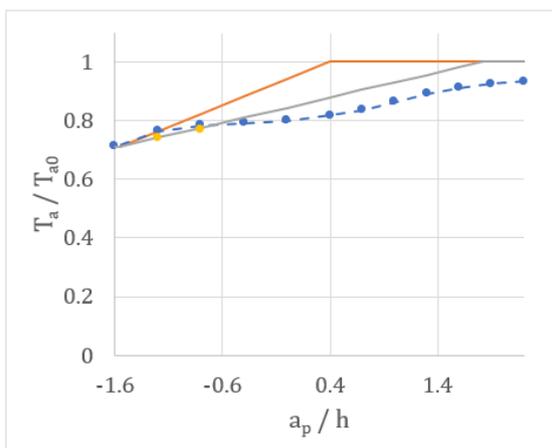


Figura 115 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\u00e9dia}=2.5MPa$, $y=0.825h$.

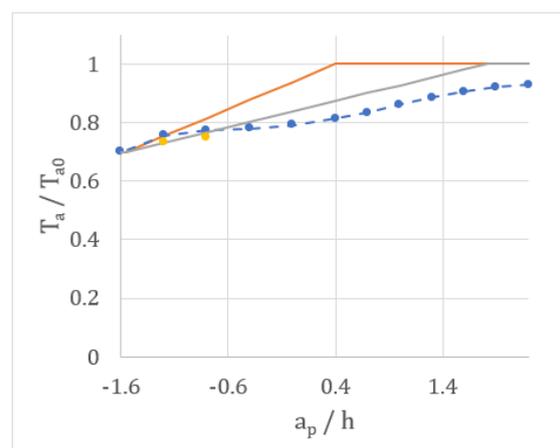


Figura 116 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\u00e9dia}=3.0MPa$, $y=0.825h$.

- Modelo de equilíbrio
- • - Modelo de equilíbrio + compatibilidade
- Alteração proposta
- Modelo de equilíbrio + compatibilidade com a armadura proposta

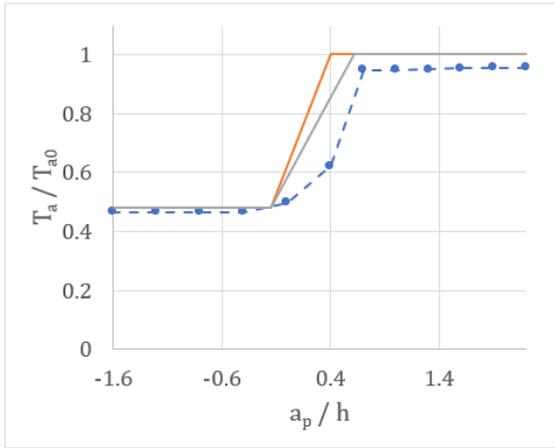


Figura 117 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=0.5MPa$, $y=0.125h$.

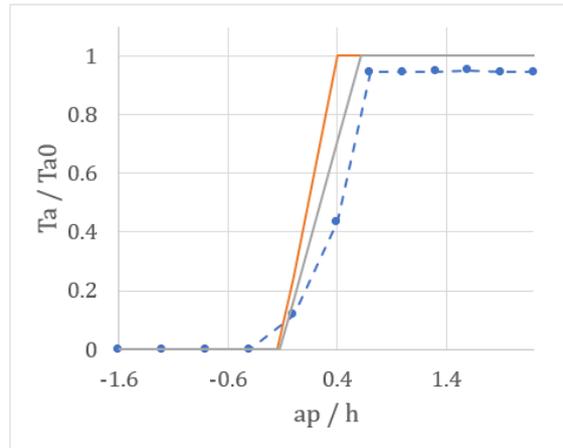


Figura 118 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.0MPa$, $y=0.125h$.

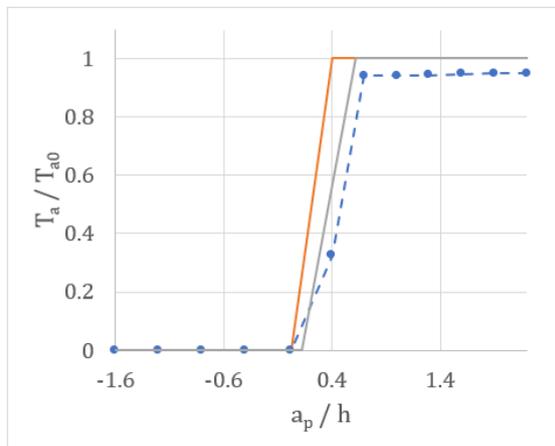


Figura 119 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5MPa$, $y=0.125h$.

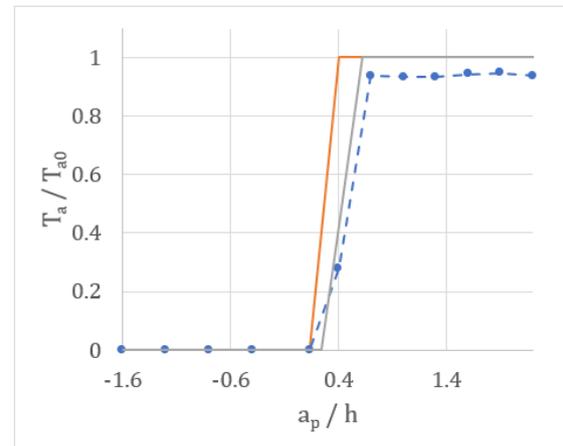


Figura 120 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=2.0MPa$, $y=0.125h$.

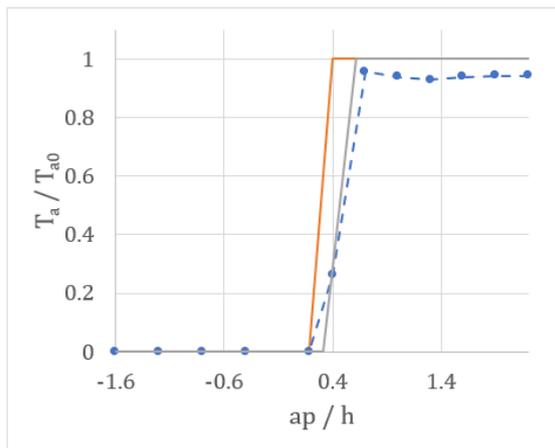


Figura 121 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=2.5MPa$, $y=0.125h$.

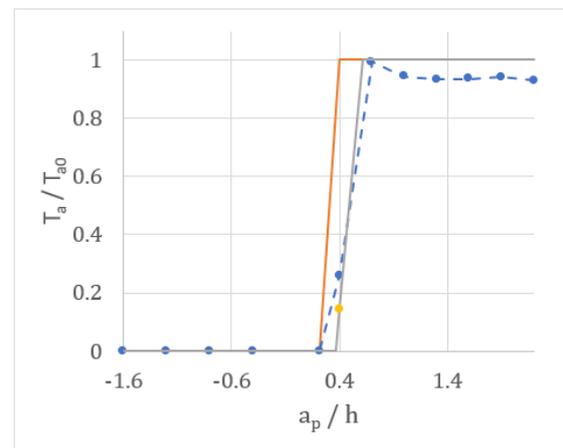


Figura 122 - T_a/T_{a0} , $\sigma_{m\acute{e}dia}=3.0MPa$, $y=0.125h$.

- Modelo de equilíbrio
- • - Modelo de equilíbrio + compatibilidade
- Alteração proposta
- Modelo de equilíbrio + compatibilidade com a armadura proposta

A situação em que a resultante da força axial se encontra próxima de meia altura da secção, apresentada nos gráficos das figuras 105 – 110, apresenta resultados mais próximos aos obtidos nas análises fisicamente não lineares relativamente aos resultados obtidos inicialmente pela fórmula simplificada. Esta melhor aproximação de resultados tem ênfase para esforços axiais mais elevados. Os resultados que não foram confirmados à priori pela simples sobreposição dos resultados obtidos pela nova sugestão tiveram de ser novamente calculados, desta vez com a área de armadura à face do apoio obtida pela fórmula resultante da nova sugestão. Deste modo foi necessário verificar os seguintes modelos:

- $\sigma_{\text{média}} = 1.5 \text{ MPa} \rightarrow \text{Modelo } a_p/h = -0.8;$
- $\sigma_{\text{média}} = 2.0 \text{ MPa} \rightarrow \text{Modelo } a_p/h = -0.8;$
- $\sigma_{\text{média}} = 2.5 \text{ MPa} \rightarrow \text{Modelo } a_p/h = -0.4;$
- $\sigma_{\text{média}} = 3.0 \text{ MPa} \rightarrow \text{Modelos } a_p/h = -0.4 \text{ e } a_p/h=0.7.$

A situação em que a resultante da força axial se encontra próxima da fibra superior da viga, apresentada nos gráficos das figuras 111 – 116, apresenta também resultados mais próximos aos obtidos nas análises fisicamente não lineares relativamente aos resultados obtidos inicialmente pela fórmula simplificada. Os modelos revistos para este caso foram os seguintes:

- $\sigma_{\text{média}} = 1.5 \text{ MPa} \rightarrow \text{Modelo } a_p/h = -1.2;$
- $\sigma_{\text{média}} = 2.0 \text{ MPa} \rightarrow \text{Modelo } a_p/h = -1.2 \text{ e } a_p/h = -0.8;$
- $\sigma_{\text{média}} = 2.5 \text{ MPa} \rightarrow \text{Modelo } a_p/h = -1.2 \text{ e } a_p/h = -0.8;$
- $\sigma_{\text{média}} = 3.0 \text{ MPa} \rightarrow \text{Modelos } a_p/h = -1.2 \text{ e } a_p/h=-0.8.$

A situação em que a resultante da força axial se encontra próxima da fibra inferior da viga, apresentada nos gráficos das figuras 117 – 122, não apresenta alterações significativas para a proposta inicial visto que para esta situação os resultados já anteriormente obtidos pela fórmula eram muito semelhantes aos obtidos nas análises fisicamente não lineares. O único modelo que teve necessidade de ser revisto para esta situação foi o modelo $a_p/h = 0.4$ para $\sigma_{\text{média}} = 3.0 \text{ MPa}$.

Saliente-se que, por não se terem realizado as análises com a área de armadura à face do apoio calculada pela nova sugestão para todos os casos, poderá resultar numa força instalada obtida inferior às análises realizadas para a proposta inicial, o que consiste numa possível ainda maior folga. Esta premissa parte do facto de que quando é colocada maior área de armadura à face do apoio do que a estritamente necessária existe mais força instalada, como observado ao decorrer deste trabalho.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A verificação de apoios de extremidade é geralmente realizada com recurso a modelos de escoras e tirantes. O presente trabalho partiu de um aspeto particular desta verificação, que diz respeito à força longitudinal inferior a amarrar no apoio, que sempre foi tratada com pouca clareza, particularmente aquando da existência de armaduras pré-esforçadas ancoradas na proximidade da região do apoio.

Perante esta questão, o presente trabalho teve como principal objetivo validar o uso de uma expressão desenvolvida a partir de um modelo de campos de tensões, no âmbito dos trabalhos em curso para o desenvolvimento do futuro *fib Model Code 2020*, através de um programa de cálculo automático que permite realizar análises fisicamente não lineares de regiões de betão estrutural e que utiliza o método dos elementos finitos, EvalS.

Constata-se que o objetivo principal foi atingido, uma vez que o presente trabalho conseguiu demonstrar a adequabilidade da expressão proposta para a avaliação da força longitudinal na face do apoio e que deve ser devidamente amarrada de modo a garantir a segurança do nó CCT. A avaliação da força longitudinal presente na armadura inferior do apoio, estimada com base no modelo de campos de tensões, demonstrou tratar-se de uma condição mínima para garantir a segurança. Este pressuposto baseou-se no fato de: quando se adota a quantidade de armadura mínima, quer na situação sem esforço axial, quer nas situações em que se considerou a existência de pré-esforço, os resultados obtidos das análises fisicamente não lineares mostraram boa concordância com os estimados pelo modelo analítico proposto.

Quando há dificuldade em amarrar a armadura longitudinal no apoio, deve-se procurar mover a ancoragem de pré-esforço no sentido da face inferior da viga, de modo a reduzir a força na armadura inferior. A avaliação desta contribuição foi também compreendida, tornando possível quantificar esta contribuição. Efetivamente, o trabalho demonstrou que o esforço axial quando posicionado perto do topo da viga não tem uma influência expressiva na amarração, já em sentido inverso, quanto mais próximo da zona inferior da viga, maior é a sua contribuição.

A localização na direção longitudinal da aplicação da força axial também constitui um parâmetro importante para a quantificação da força de tração inferior. A distância da aplicação do esforço axial à face externa do apoio, quando superior a cerca de uma distância idêntica à altura da secção da viga, pode-se considerar uma distribuição linear de tensões e, por conseguinte, toda a força pode ser considerada. No entanto, quando a força axial se aproxima da zona do apoio, a sua contribuição vai diminuindo. Este estudo demonstrou que esta contribuição segue uma tendência linear até ao limite da escora em leque do apoio, onde se verifica que a contribuição do esforço

axial deixa de se manifestar. Este benefício é justificado pela alteração da inclinação das compressões que vão para o apoio aquando da presença de esforço axial, logo quando a força aplicada está fora dessas compressões, já não tem efeito no seu desvio.

Foi também cumprido o objetivo referente ao estudo da influência da colocação de diferentes áreas de armaduras que se prolongam até ao apoio, conforme prática corrente. A colocação de uma maior área de armadura do que a estritamente necessária resultou num aumento da força de tração instalada.

A maioria das análises efetuadas mostrou que a armadura longitudinal inferior do apoio não se encontrava plastificada, tendo-se obtido, de forma indireta, os níveis de segurança entre o modelo fisicamente não linear e a fórmula que resulta do modelo de campos de tensões, através do quociente entre a tensão de plastificação e a tensão obtida no modelo numérico. Foi desprezada uma eventual redistribuição de tensões que possa ocorrer e que incremente este fator de segurança. Esta estimativa demonstrou que quando a força axial se encontrava aplicada na região do apoio, geralmente existem folgas superiores, aumentando ainda mais para tensões médias superiores.

Em contraponto com esta ideia, sugere-se que em desenvolvimentos futuros, esta margem de segurança para o mecanismo de rotura estudado, seja calculada da forma mais precisa, procedendo-se a sucessivos redimensionamentos da viga, por forma a garantir que a carga última seja realmente obtida para o mecanismo de rotura a estudar. Seria ainda interessante estudar, em desenvolvimentos futuros as seguintes situações:

- O ângulo $\alpha \neq 0$, i.e., que se considere que a força aplicada à face da viga tinha uma dada inclinação com o eixo longitudinal da viga.
- Os estribos não tenham um posicionamento vertical. Os regulamentos atuais permitem adoção de armadura transversal inclinada, embora tal não seja usual em situações correntes. Porém, este aspeto pode ser relevante na avaliação de estruturas existentes.
- Estudar tensões médias mais elevadas. No trabalho corrente foram estudadas tensões médias de até 3MPa, no entanto, para uma mais completa situação poderiam ter sido apresentadas gamas de valores superiores.
- Analisar vigas pré-esforçadas pré-tensionadas com cordões aderentes nas zonas dos apoios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- American Concrete Institute. (2002). Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-02) and Commentary (ACI 318R-02). ACI Committee 318, ACI, Michigan
- Boussinesq, J. (1885). Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides élastiques, Gauthier-Villars, Paris.
- Caupers, D. (2020). Seleção e avaliação de modelos de campos de tensões - modelos de vigas parede contínuas (dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico).
- CEB-FIP MC 90. (1993). Design of concrete structures. CEB-FIP-Model-Code 1990. Thomas Telford
- Eurocódigo 2 – NP EN 1992-1-1 (1998) – Projeto de Estruturas de Betão - Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Termo de Homologação nº68/98, Lisboa.
- Ferreira, M., Lourenço, M., & Almeida, J. (2017). Using stress fields models for analysis of couple beam in structural concrete. Encontro nacional de Betão Estrutural. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas.
- Gonçalves, E. (2018). Aplicação de modelos não lineares ao estudo de regiões de descontinuidade de betão estrutural (dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico).
- Guimarães, A. (2020). Seleção e avaliação de modelos de campos de tensões – modelos de cantos re-entrantes ou vigas com degraus (dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico).
- Hars, E. (2006). Shear Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Girders with Thin Webs, PhD thesis, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 144 pp. (in German)
- Hellebois, A. & Espion, B. (2010). Domination of Commercial Patents in the Evolution of Early Reinforced Concrete: Case-Study of the Region of Brussels, Advanced Materials Research Vols. 133-134 (2010) pp 119-124, Switzerland.
- Kupfer, H. (1964). Generalization of Morsch's Truss analogy Using the Principle of Minimum Strain Energy.
- Leonhardt, F., & Mönig, E. (1973). *Vorlesungen über Massivbau*. Springer.
- Lourenço, M., & Almeida, J. (2004). Campos de tensões em zonas de descontinuidade, Encontro nacional betão estrutural.
- Marti, P. (1985). Basic tools of reinforced concrete beam design, *Journal of the American Concrete Institute* Vol. 82, No. 1, Jan.-Feb. 1985. Discussion Vol. 82, No. 6.
- Mörsch, E. (1909). *Concrete-steel Construction:(Der Eisenbetonbau)*. Engineering news publishing Company.
- Murray, A., Gilbert R., & Castel A. (2018). A New Approach to Modeling Tension Stiffening in Reinforced Concrete, ACI STRUCTURAL JOURNAL, Title no. 115-S10

Muttoni, A., Schwartz, J., & Thürlimann, B. (1997). *Design of Concrete Structures with Stress Fields*, Birkhäuser, Basel, Boston and Berlin, Switzerland, 145 pp.

Ritter, W. (1899). *Die Bauweise Hennebique*. *Schweizerische Bauzeitung*.

Ruiz, M., Muttoni, A. (2007). On Development of Suitable Stress Fields for Structural Concrete, *Journal of the American Concrete Institute*, Title no. 104-S48

Saint-Venant, A. (1853). *Mémoire sur la torsion des prismes*, l'Académie des Sciences de l'Institut Impérial de France, vol. 14, 233–560.

Salah E., Mohamed E., & Mohamed I.(2016). *Engineering Research Journal* 150 C23 –C46

Schlaich, J., & Schäfer, K. (1991). Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models. *The Structural Engineer*, V.69, No.6.

Schlaich, J., Schäfer, K., & Jennewein, M. (1987). Toward a Consistent Design for Structural Concrete. *PCI-Journal*, V.32, No.3.

Sousa, A. (2019). *Seleção e avaliação de modelos de campos de tensões – Modelos típicos de vigas paredes submetidas a cargas concentradas indiretas* (dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico).

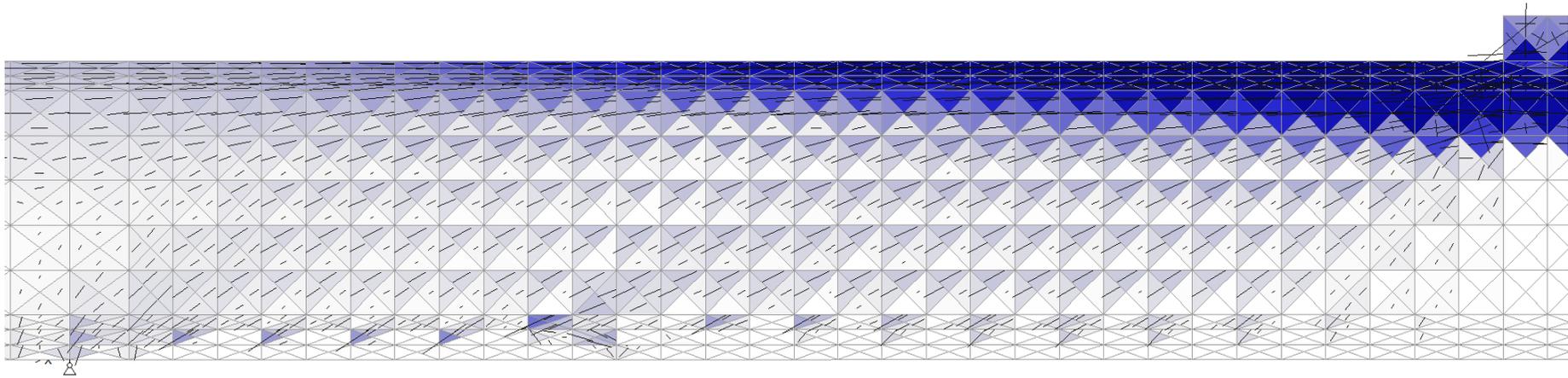
Tommasi, G., Monaco, P. & Vitone C. (2003). A first approach to the load path method on masonry structure behaviour, *Transactions on the Built Environment* vol 66.

Vecchio, F., Collins, M., & Aspiotis, J.(1994). High-Strength Concrete Elements Subjected to Shear, *ACI Structural Journal*, V. 91, No. 4, pp. 423-433.

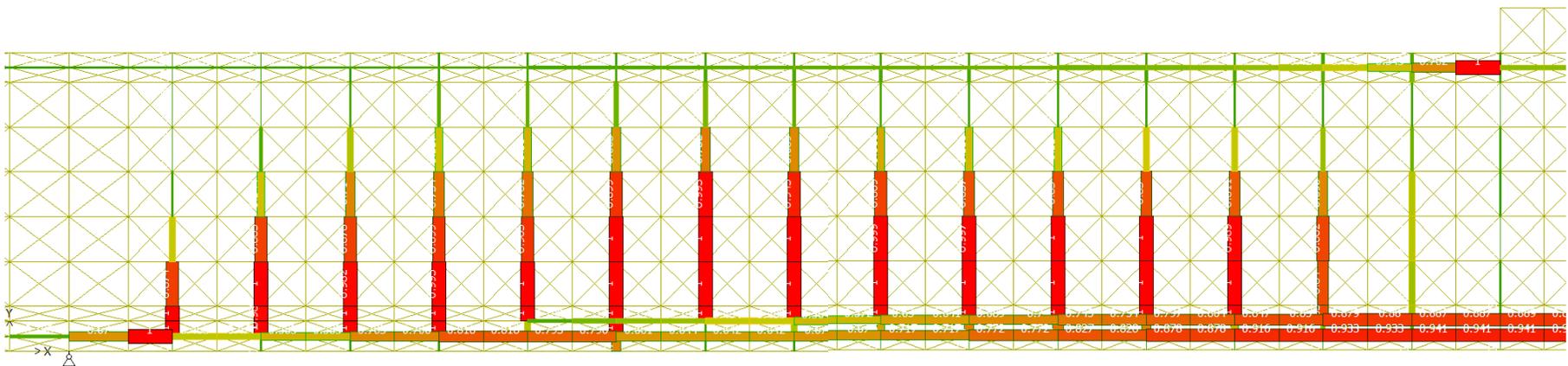
ANEXOS

Força pontual aplicada a $Y=0.825h$

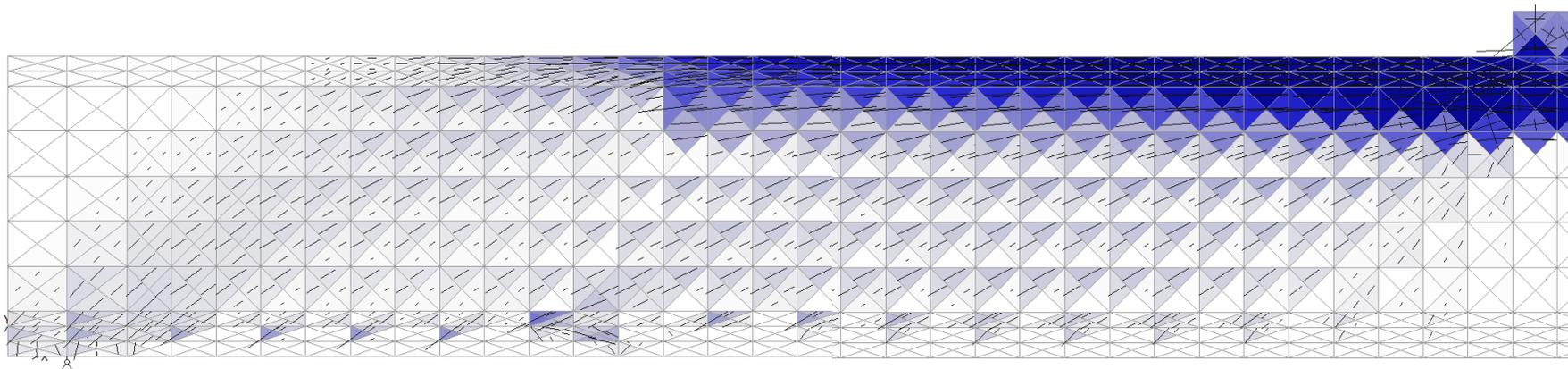
Campo de compressões - $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $a_p/h= -1.6$.



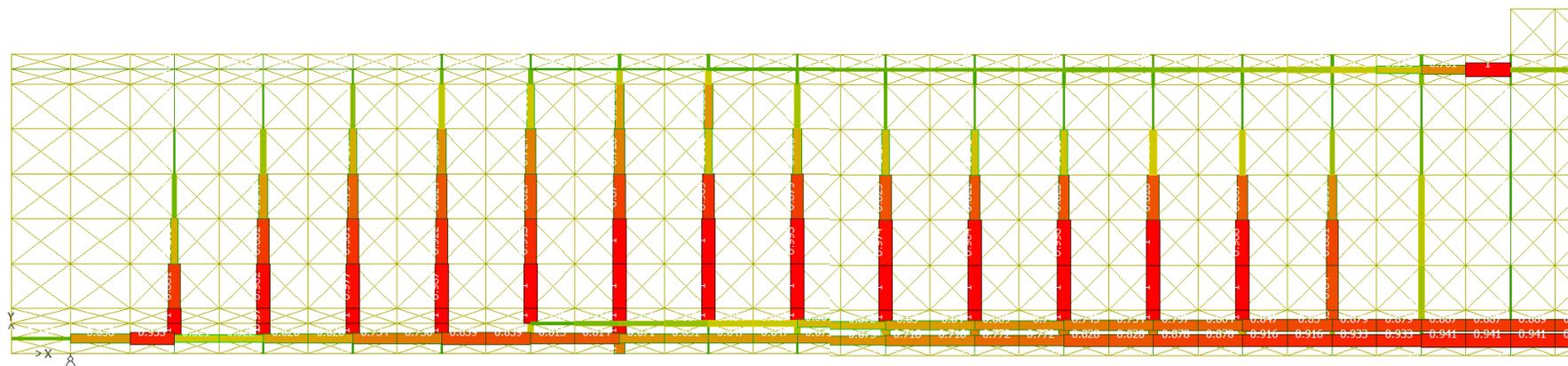
Utilization ratio - armaduras - $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $a_p/h= -1.6$.



Campo de compressões - $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $a_p/h= 2.2$.

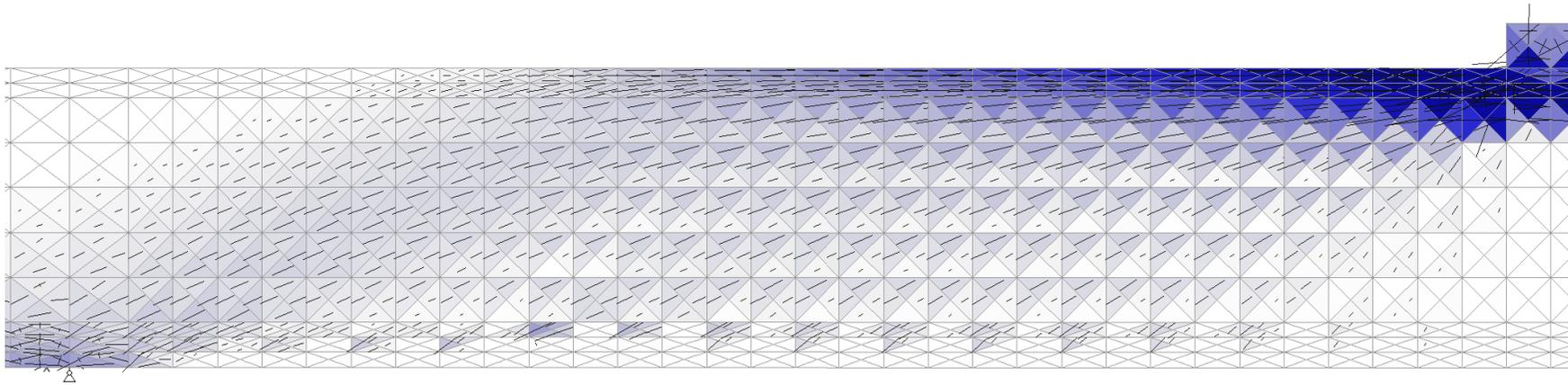


Utilization ratio - armaduras - $\sigma_{m\acute{e}dia}=1.5\text{MPa}$, $y=0.825h$, $a_p/h= 2.2$.

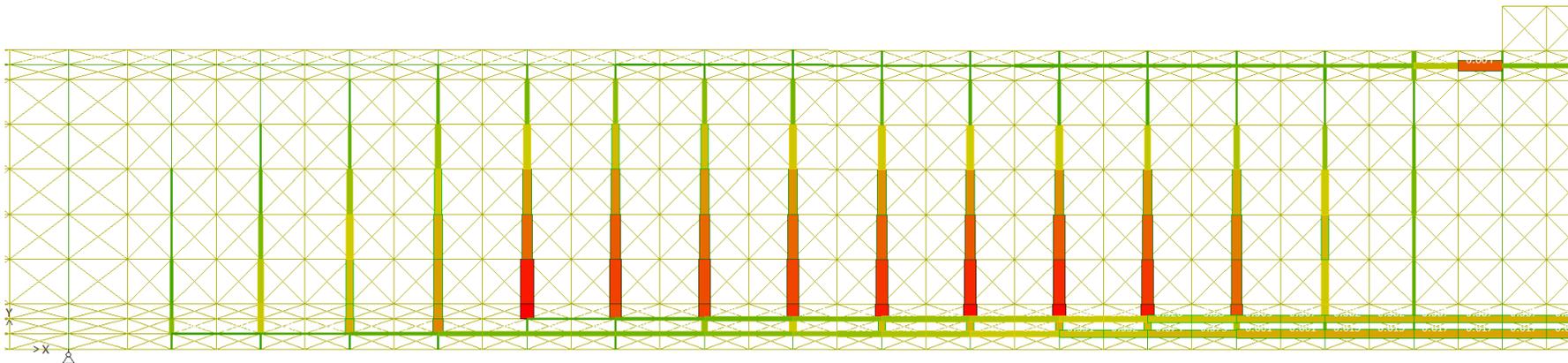


Força pontual aplicada a $Y=0.125h$

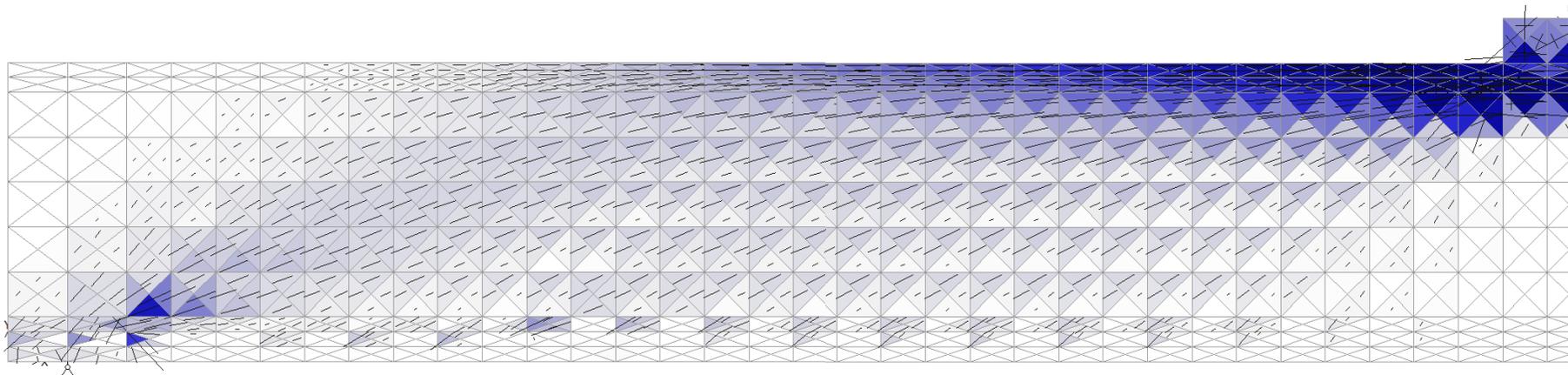
Campo de compressões - $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $a_p/h= -1.6$.



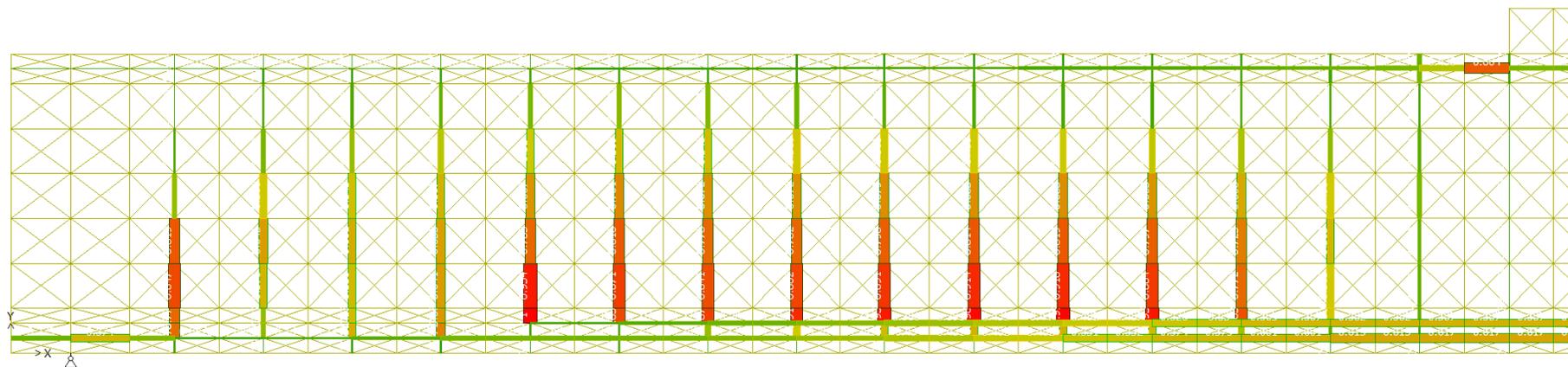
Utilization ratio - armaduras - $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $a_p/h= -1.6$.



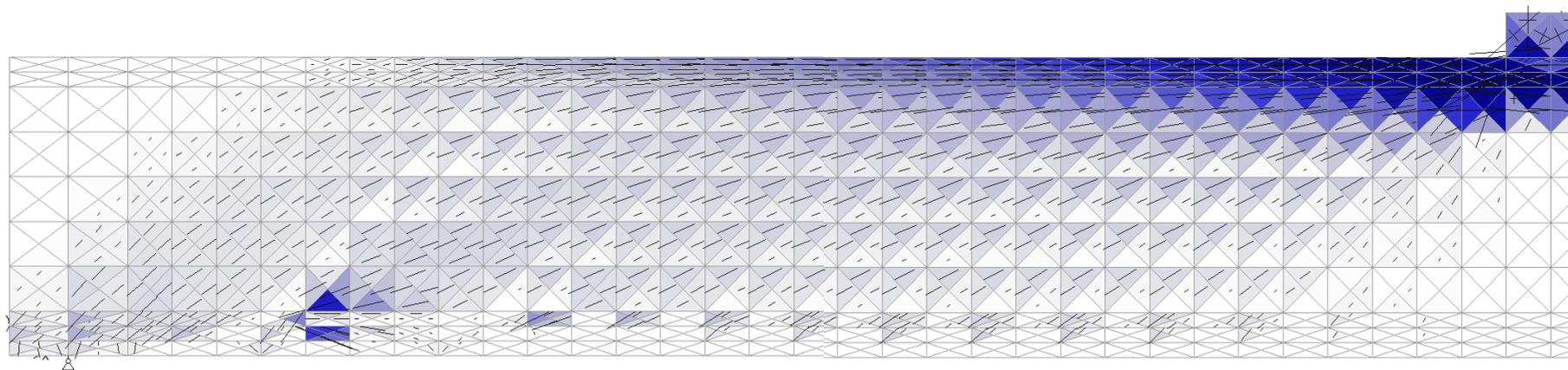
Campo de compressões - $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $a_p/h=0.4$.



Utilization ratio - armaduras - $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $a_p/h=0.4$.



Campo de compressões - $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $a_p/h= 1.0$.



Utilization ratio - armaduras - $\sigma_{\text{média}}=1.5\text{MPa}$, $y=0.125h$, $a_p/h= 1.0$.

